# Niklaus und Johann Bernoullis
# Forschungen auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung
# in ihrem Briefwechsel
# mit Pierre Rémond de Montmort

Verkürzte Fassung der

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der Würde eines Doktors der Philosophie

vorgelegt der
Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von

JULIAN HENNY
aus Obersaxen (Graubünden)

1970

Basel
Birkhäuser Verlag
1973

# Niklaus und Johann Bernoullis
# Forschungen auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung
# in ihrem Briefwechsel
# mit Pierre Rémond de Montmort

Verkürzte Fassung der

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der Würde eines Doktors der Philosophie

vorgelegt der
Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von

JULIAN HENNY

aus Obersaxen (Graubünden)

Basel
Birkhäuser Verlag
1973

Genehmigt von der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät auf Antrag der Herren

PD Dr. J. O. Fleckenstein
PD Dr. B. Romer
Prof. Dr. P. Leepin

Basel, den 10. Februar 1970

Der Dekan:
Prof. Dr. S. Fallab

Herrn Julian Henny wurde von der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel am 10. Februar 1970 erlaubt, diese verkürzte Fassung seiner am 10. Februar 1970 genehmigten Inauguraldissertation drucken zu lassen. Die vollinhaltliche Arbeit mit dem Titel:

Niklaus und Johann Bernoullis Forschungen auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrem Briefwechsel mit Pierre Rémond de Montmort

kann eingesehen oder entliehen werden:

1. in der versicherungstechnischen Abteilung des mathematischen Instituts der Universität Basel;
2. in der Universitätsbibliothek Basel;
3. in der Schweizerischen Landesbibliothek in Bern.

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Separatabdruck aus der Ausgabe der Werke von Jakob Bernoulli, herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, Band 3 (Basel 1974)

INHALTSVERZEICHNIS

*Einführung* ..... 5

Erster Teil: *Kombinatorische Probleme* ..... 10

1. Die Anzahl der Kompositionen einer natürlichen Zahl ..... 10
2. Über Potenzen von Polynomen ..... 17
3. Das Problem der *rencontres* ..... 20

Zweiter Teil: *Wahrscheinlichkeitsrechnung* ..... 27

1. Überblick ..... 27
2. Das Pharao-Spiel ..... 30
3. Das *problème des partis* ..... 35
4. Das Problem des Rollenwechsels im *jeu du Lansquenet* ..... 38

Dritter Teil: *Strategische Spiele* ..... 43

*Bibliographie* ..... 51

*Zusammenfassung* ..... 55

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546022_0068

# EINFÜHRUNG

Mit den folgenden Notizen beabsichtigen wir eine formelle Beschreibung des wahrscheinlichkeitstheoretischen Teils des Briefwechsels. Die Entstehung und Fortführung dieser Korrespondenz steht in engem Zusammenhang mit Montmorts übrigem mathematischen Schaffen. Es erscheint uns daher angebracht, die ohnehin wenig bekannte Persönlichkeit Montmorts in den Vordergrund zu stellen.

## 1. MONTMORTS LEBEN

Pierre Rémond de Montmort wurde am 27. Oktober 1678 in Paris als Sohn des François Rémond de Breviande und der Marguerite Ralle geboren. Von seinem Vater, einem Angehörigen des französischen Adels, soll er sehr streng erzogen worden sein. Das Rechtsstudium, zu dem man ihn zwingen wollte, widersprach seinen Neigungen so sehr, daß er sich durch Flucht nach England der väterlichen Obhut entzog. Von dort begab er sich nach Holland und schließlich zu einem Verwandten nach Regensburg. Beim Aufenthalt in Deutschland lernte er Malebranches *Recherches de la vérité*[1]) kennen. Dieses berühmte Werk beeinflußte stark den weiteren Lebensweg Montmorts. Kurz nach seiner Rückkehr nach Frankreich (1699) starb sein Vater und hinterließ ihm ein reiches Erbe, aber der Drang nach Philosophie und Mathematik, der noch durch die Freundschaft mit Malebranche vertieft wurde, hielt ihn davon ab, sich nur den Vergnügungen hinzugeben. Gerade in dieser Zeit drang Montmort in die Tiefe der mathematischen Wissenschaften ein.
Als sein jüngerer Bruder die Stelle als Domherr zu Nôtre-Dame in Paris aufgab, übernahm Pierre Rémond auf vielseitiges Drängen hin dieses Amt. Fontenelle legt über sein Wirken als Domherr ein schönes Zeugnis ab; er berichtet von seinem unermüdlichen Eifer im Dienste der Mitmenschen:

«Il avoit reçû de la nature des inclinations nobles, genereuses, et bienfaisantes, et tout ce qui pouvoit les porter à un haut degré de perfection se réünissoit en lui, la Philosophie, la Religion, les engagements encore plus étroits de l'état Ecclesiastique... il ne manquoit jamais ni à l'amour des Sciences, ni à celui du Prochain»[2]).

Aber die gewissenhafte Hingabe an seine hohen Aufgaben brachten den jungen Domherrn in einen Konflikt zwischen Seelsorge und Wissenschaft, so daß er sich entschloß, das Amt niederzulegen.
Schon während seines Kanonikates hatte Pierre Rémond die Besitzung Montmort[3]) gekauft. Nach seiner Amtsniederlegung zog er sich von Paris auf dieses Schloß zurück und heiratete 1706 Mademoiselle de Romicourt. Ein glückliches Familienleben und die langersehnte Ruhe schufen die Voraussetzung für ein fruchtbares Studium in den mathematischen Wissenschaften. Schon 1708 veröffentlichte er ein Buch über die

[1]) N. Malebranche, *De la Recherche de la vérité, où l'on traite de la nature de l'esprit de l'homme et de l'usage qu'il en doit faire pour éviter l'erreur dans les sciences.* Paris 1674/75.
[2]) *Eloge de M. de Montmort.* Hist. Acad. Paris *1719*, 85.
[3]) Das Schloß Montmort, von Epernay aus erreichbar, steht auf dem linken Ufer des Surmelin, im heutigen Département de la Marne.

mathematische Behandlung von Glücksspielen[4]). Der große Anklang, den dieses Werk gefunden hatte, rechtfertigte eine Neuauflage (1713). Außer einer Abhandlung über die Summierung unendlicher Reihen (1717)[5]) hat Montmort keine weiteren bedeutenden Schriften verfaßt. Mit vielen Mathematikern unterhielt er einen regen Briefwechsel; außer mit Johann und Niklaus Bernoulli auch mit anderen berühmten Zeitgenossen wie mit Leibniz, Taylor, de Moivre und anderen[6]). Seit 1715 gehörte Montmort der Royal Society von London und seit 1716 der Académie Royale des Sciences von Paris an. Seine besondere Hinneigung zu England, das er dreimal besuchte, erklärt seine neutrale Haltung im Prioritätsstreit um den Infinitesimalkalkül. Für seinen großen Plan, eine Geschichte der Mathematik zu schreiben, war sein Leben zu kurz. Am 7. Oktober 1719 starb Montmort an den Pocken.

## 2. MONTMORTS HAUPTWERK

Daß Montmort ein vielseitiges Interesse für alle mathematischen Wissenschaften besaß, beweist uns der Inhalt seiner Briefe. In seinen wenigen Publikationen beschränkt er sich jedoch auf das Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Reihenlehre. Sein Hauptwerk, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, das 1708 in Paris erschien[7]), darf zweifellos als eine für die damalige Zeit originelle Darstellung gewertet werden. Allerdings muß hier beigefügt werden, daß Montmort diese Originalität in einigen Teilen des Buches dem Umstand zu verdanken hat, daß Jakob Bernoullis Entdeckungen auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung erst 1714 in der berühmten *Ars Conjectandi* an die Öffentlichkeit gelangten, obwohl sie in den *Meditationes* schon ungefähr zwei Jahrzehnte vor Montmorts *Essay* niedergelegt wurden. Es ist anzunehmen, daß Montmort vom Inhalt dieser Arbeiten nicht viel mehr gewußt hat, als in den Eloges auf Jakob Bernoulli[8]) zu lesen ist. Die Berichte in diesen Eloges über die Erfolge Bernoullis auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben Montmort, wie er im Vorwort seines *Essays* schreibt[9]), zur selbständigen Auseinandersetzung mit den Problemen und zur Abfassung seines Buches ermutigt.

Auf den ersten Blick erscheint uns die erste Auflage als ein Vademecum für Glücksspieler. Während Montmort in der Behandlung der Spiele Einzelfälle sehr ausführlich berechnet, fertigt er oft den allgemeinen Fall mit einer unbewiesenen Formel ab. Montmort hält es für wenig sinnvoll, einen schwierigen Beweis zu publizieren; denn nur jene würden ihn verstehen, die ohnehin selber fähig seien, ihn zu erbringen. Dem

4) Das Werk erschien anonym; auf dem Titelblatt steht: *Essay d'analyse sur les jeux de hazard. A Paris, Chez Jacque Quillau, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Université, rue Galande. MDCCVIII. Avec approbation et privilège du Roy.*

5) *De Seriebus infinitis Tractatus.* Pars Prima. Auctore Petro Remundo de Monmort. R. S. S. Phil. Transact. *30*, 1717, 633–675 (London 1720).

6) Vgl. I. Schneider, *Der Mathematiker Abraham de Moivre (1667–1754)*. Archive for History of Exact Sciences *5*, 186, 193–195, 259 (1968).

7) Siehe Anmerkung 4.

8) a. *Eloge de M. Bernoulli.* Hist. Acad. Paris *1705*, 139–150.
b. *Eloge de M. Bernoulli.* Journal des Sçavans *1706*, 81–89.

9) *Essay* 1°, p. V = *Essay* 2°, p. V. Zu den verwendeten bibliographischen Abkürzungen siehe unter Bibliographie.

Spieler kommt er noch mehr entgegen, wenn er bisweilen die allgemeine Formel in einem verbalen Rezept wiedergibt. Auch die vielen numerischen Resultate, die Montmort einen großen Zeitaufwand und viel Ausdauer gekostet haben, zeigen, daß er sich unter dem Leserkreis in erster Linie nicht Mathematiker, sondern Glücksspieler vorgestellt hatte. Dem mathematisch interessierten Leser bietet sich die zweite Auflage in einer befriedigenderen, in bezug auf die Beweise vollständigeren Form dar. Zudem enthält sie im Anhang einen großen Teil der zwischen 1708 und 1713 geführten Korrespondenz mit Johann und Niklaus Bernoulli[10]).

## 3. DER BRIEFWECHSEL MIT JOHANN UND NIKLAUS BERNOULLI

Der Briefwechsel mit Johann Bernoulli beginnt mit einem kurzen Brief Montmorts vom 27. 2. 1703, in dem er sich mit einer Bitte an Johann Bernoulli in Groningen wendet. Er schreibt darin, Varignon habe in der Pariser Akademie einen Vortrag über Bernoullis Methode, alle rationalen Funktionen zu integrieren, gehalten. Da Montmort den Vortrag nicht gehört habe und Varignon es ohne Zustimmung Bernoullis ablehne, ihm darüber zu erzählen, bittet er Bernoulli um Erteilung der Erlaubnis an Varignon oder an Fontenelle. Dem Brief liegt ein Empfehlungsschreiben de l'Hôpitals bei, in dem noch auf eine Empfehlung Malebranches hingewiesen wird. Damit war der Auftakt zu einem ansehnlichen Briefwechsel gegeben, der bis zum Todesjahr Montmorts (1719) dauerte und von dem wir heute im Nachlaß vierzig Briefe besitzen. Allerdings sind uns aus der Zeit vor 1710 nur sechs Briefe erhalten, wovon nur ein einziger von Johann Bernoulli stammt (25. 11. 1704), obwohl schon der erste Brief Montmorts von Johann Bernoulli beantwortet wurde, wie aus dem zweiten Brief Montmorts (1. 9. 1704) hervorgeht. Einen langen Brief Montmorts, den dieser anfangs 1706 nach Groningen abschickte, hat Johann Bernoulli, der bereits nach Basel gezogen war, nie mehr erhalten[11]).

Im Brief Montmorts vom 29. 4. 1709 wird Johann Bernoulli um Stellungnahme und um Verbesserungsvorschläge zu seinem *Essay* gebeten. Ein Jahr später, im Brief vom 17. 3. 1710, geht Johann Bernoulli ausführlich auf Montmorts Buch ein[12]). Er finde darin sehr interessante Dinge; er ist es auch, der Montmort den Vorschlag zu einer neuen, erweiterten Edition macht. Bemerkenswert ist die Gründlichkeit, mit der er das *Essay* durchgelesen und auch belanglose Rechenergebnisse nachgeprüft hat. Zu vielen Problemen bringt er Berichtigungen und interessante Ergänzungen an. Wenn sich Johann Bernoulli sonst kaum mit Wahrscheinlichkeitsrechnung befaßt hat, so war er doch mit der Materie tief vertraut, wie man aus dem erwähnten Brief ersieht. Es ist zu vermuten, daß er in dieses Neuland von seinem älteren Bruder eingeführt wurde.

Ein Jahr zuvor (1709) erschien Niklaus Bernoullis Dissertation über die Anwendung

[10]) *Essay* 2°, pp. 283–412.

[11]) Dies entnehmen wir den Briefen Montmorts vom 20. 9. 1706 und vom 29. 4. 1709.

[12]) Der Brief ist abgedruckt in *Essay* 2°, pp. 283–298, und in den *Opera* Johannis Bernoulli I, pp. 453–468.

der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Rechtsfragen[13]). Johann Bernoulli benützte die Gelegenheit, seinen Neffen zum Studium von Montmorts Buch heranzuziehen. Dieser legte denn auch dem eben erwähnten Brief einige Ergänzungen in lateinischer Sprache bei[14]), auf die wir in unserer Arbeit verschiedene Male zurückkommen. Darin fallen zwei hervorragende Fähigkeiten des jungen Mathematikers und Juristen auf, die wir in seinen Briefen öfters wieder finden werden: der Drang nach Verallgemeinerung sowie eine zähe, auf Klarheit ausgerichtete Beweiskraft. Daß Montmort, der Niklaus Bernoullis Dissertation bereits gelesen hatte[15]), nun nach dessen Beigaben seinen idealen Briefpartner in Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gefunden hatte, lag auf der Hand. Es ist auch bezeichnend, daß der Briefwechsel mit Johann Bernoulli in den kommenden Jahren abflaute. Nach einem interessanten Antwortschreiben vom 11. 11. 1710[16]) finden sich keine Briefe an Johann Bernoulli, bis Montmort am 5. 12. 1712 wieder mit einigen Problemen über Wahrscheinlichkeitsrechnung an ihn gelangt. Erst im Sommer 1714 beginnt der Briefwechsel mit Johann Bernoulli wieder aufzuleben, hingegen werden keine Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung mehr angeschnitten.

Der Nachlaß des Briefwechsels mit Niklaus Bernoulli enthält 58 Briefe, wovon 27 von Montmort und 31 von Niklaus Bernoulli stammen. Er beginnt mit einem Brief Bernoullis vom 26. 2. 1711; daraus entnehmen wir, daß bereits ein Brief Montmorts, der nicht erhalten ist, vorausging. Während in den ersten Jahren vorwiegend Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung erörtert wurden, dehnte sich der Briefstoff von 1714 an immer mehr auf andere Gebiete aus, insbesondere auf das weitere Spezialgebiet Niklaus Bernoullis, die Reihenlehre, aber auch auf Fragen der Infinitesimalrechnung und der Physik. Für unsere Arbeit ist vor allem die Zeit von 1711 bis 1714 von Interesse. Die Jahre 1711 und 1712 waren noch stark von Montmorts *Essay* beeinflußt; viele der darin behandelten Gebiete wurden in den Briefen dieses Zeitraumes wieder aufgegriffen und ausgebaut, so daß es sinnvoll war, die entsprechenden Briefstellen in der zweiten Auflage des *Essays* zu publizieren. Vom Januar bis zum April 1713 weilte Niklaus Bernoulli bei Montmort zu Gast[17]). Dieser Aufenthalt gereichte der Vorbereitung des Neudruckes von Montmorts Werk ebenfalls zum Nutzen. Montmort schreibt im Brief vom 5. 3. 1713 an Johann Bernoulli[18]):

«Mr. vostre neveu est furieusement sçavant et est tres infatigable. Je ne peux travailler deux heures de suitte, il en travaille six sans estre las. il m'a proposé plusieurs problemes fort jolis et je m'en suis tiré avec assez d'honneur et de bonheur. ce sera des Augmentations pour mon livre. je crois que vous serez content d'un traitté complet que je donne sur les combinaisons. je ne crois pas qu'on puisse pousser plus loin cette matiere.»

[13]) *Dissertatio inauguralis mathematico-juridica de usu artis conjectandi in jure, quam...* pro gradu doctoratus in utroque jure legitime consequendo ad diem 14 Junii A. D. MDCCIX... publice defendet M. Nicolaus Bernoulli, Basiliensis. Basileæ, Typis Johannis Conradi à Mechel (1709).

[14]) Abgedruckt in *Essay* 2°, pp. 299–303.

[15]) Siehe Montmorts Brief vom 15. 9. 1709 an Johann Bernoulli.

[16]) Abgedruckt in *Essay* 2°, pp. 303–307. Außer den beiden erwähnten sind keine weiteren Briefe aus dem Briefwechsel mit Johann Bernoulli in *Essay* 2° abgedruckt.

[17]) Dies entnehmen wir einem Brief Niklaus Bernoullis an Leibniz vom 7. 4. 1713, gedruckt in C. I. Gerhardt, *Leibnizens mathematische Schriften* III, pp. 982–985.

[18]) Dieser Brief ist ungedruckt.

Der umfangreichste und wertvollste Teil des gesamten Briefwechsels zwischen Montmort und Niklaus Bernoulli erwuchs aus dem Spiel Le Her, dessen Lösung nicht mehr mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu bewältigen ist, sondern bereits die Anwendung spieltheoretischer Gesetze erfordert. Über die Erfolge, die die beiden Korrespondenten auf diesem Gebiete erzielten, berichtet der dritte Teil unserer Arbeit. An dieser Diskussion, die sich über den Zeitraum von 1712 bis 1714 erstreckte, waren auch zwei Freunde Montmorts, der Abbé d'Orbais und Waldegrave, maßgebend beteiligt[19]).

[19]) Näheres über diese beiden Personen findet sich im dritten Teil unserer Arbeit.

Erster Teil

# Kombinatorische Probleme

Daß Montmort eine besondere Vorliebe für kombinatorische Probleme besaß, zeigt sein *Essay* zur Genüge. Die Anregungen dazu erhielt er aber weitgehend bei der Behandlung einzelner Glücksspiele. So ist es nicht verwunderlich, daß viele Probleme, wie etwa die Bestimmung von Binomial- und Polynomialkoeffizienten (siehe Abschnitt 2) auf ein Würfelproblem zurückgeführt werden, während Leibniz von der Differentialrechnung her darauf gestoßen ist (Produktregel). Die Bedeutung der Kombinatorik für die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat Montmort noch dadurch hervorgehoben, daß er sie in der zweiten Auflage seines *Essays* erweitert und als selbständigen Teil an den Anfang gestellt hat[1]). Eine so umfassende und systematische Darstellung dieser Materie, wie sie der zweite Teil von Jakob Bernoullis *Ars Conjectandi* bietet, finden wir bei Montmort nicht. Eine schöpferische Leistung ist seine Formel zur Berechnung der Anzahl Möglichkeiten, mit einer vorgegebenen Anzahl von Würfeln eine bestimmte Gesamtpunktezahl zu würfeln. Diesem Problem ist der folgende Abschnitt 1 gewidmet, wobei wir uns den Gebrauch moderner Begriffe erlauben. Im Abschnitt 3 gehen wir auf das interessante Problem der *Rencontres* ein, das Montmort bei der Behandlung des Treize-Spieles aufgegriffen und als erster gelöst hat. Johann und Niklaus Bernoulli haben, daran anknüpfend, in Briefen an Montmort einige schöne Beiträge dazu geleistet.

## 1. DIE ANZAHL DER KOMPOSITIONEN EINER NATÜRLICHEN ZAHL

Unter Kompositionen einer natürlichen Zahl $n$ versteht man die Gesamtheit aller additiven Zerlegungen von $n$ der Form $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_p$, wobei die $a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ vorgegebenen Bedingungen genügen sollen und $p$ alle dabei möglichen Werte der natürlichen Zahlen durchläuft. Sieht man von der Reihenfolge der Summanden ab, so spricht man von Partitionen. Unsere historischen Untersuchungen beziehen sich ausschließlich auf Kompositionen, und zwar auf den wichtigen Spezialfall, in dem die $a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ nur unter den natürlichen Zahlen wählbar sind. Eine solche Komposition der Zahl $n$ kann bequem durch abgrenzende Striche zwischen $n$ auf einer Geraden liegenden Punkten veranschaulicht werden, zum Beispiel die Komposition $7 = 2 + 4 + 1$ durch $. . | . . . . | .$. Um alle unter den obigen Voraussetzungen möglichen Kompositionen der Zahl $n$ zu erzeugen, müssen wir die Anzahl $p$ der Summanden von 1 bis $n$ oder die Anzahl der Striche im Schema von 0 bis $n - 1$ laufen lassen. Die Anzahl aller möglichen Kompositionen der Zahl $n$ aus genau $p$ Summanden wollen wir mit $k(n, p)$ bezeichnen. Sie ergibt sich als die Anzahl der verschiedenen Fälle, $p - 1$ Striche an $n - 1$ wählbaren Stellen zu ziehen; es gilt somit

$$k(n, p) = \binom{n-1}{p-1}. \tag{1.1}$$

[1]) *Essay* 2°, pp. 1–72; der Titel dieses Teiles lautet: «Traité des Combinaisons».

Bedeutet $k(n)$ die Anzahl aller möglichen Kompositionen von $n$, so gilt

$$k(n) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} = 2^{n-1}.$$

Die Bedingungen, die die Summanden $a_i$ zu erfüllen haben, können noch dahin erweitert werden, daß sie eine vorgegebene Schranke $f$ nicht überschreiten dürfen; die Anzahl der möglichen Kompositionen sei dann $k_f(n, p)$. In dieser Allgemeinheit wurde das Problem 1657 von Huygens in seiner Abhandlung über das Würfelspiel gestellt[2]). Von einer Methode oder einer Formel zur Anzahlberechnung ist darin nichts zu finden. Huygens begnügt sich damit, sämtliche Einzelergebnisse für zwei und drei sechsseitige Würfel zusammenzustellen, um sie dann teilweise in den folgenden Propositionen auf Chancenberechnungen anzuwenden.

Von einer anderen Seite und ohne die Einschränkung $a_i \leq f$ hat Leibniz das Kompositionsproblem 1666 in seiner *Dissertatio de arte combinatoria* gestellt[3]). Wir finden diese Formulierung bei der Erörterung über Verwandtschaftsgrade[4]). Leibniz ordnet jeder verwandtschaftlichen Beziehung zwischen zwei Personen ein Zahlenpaar zu. Dabei muß zunächst bestimmt werden, welche nächsten Vorfahren beide Personen gemeinsam haben. Die Beziehung, in der die Person $B$ zur Person $A$ steht, soll dann durch das Zahlenpaar $(a, b)$ charakterisiert werden, indem $a$ und $b$ den Generationenabstand zwischen $A$ bzw. $B$ und diesen Vorfahren bedeuten. Ist zum Beispiel $B$ der Neffe von $A$, so steht $B$ in der verwandtschaftlichen Beziehung $(1, 2)$ zu $A$.

Die Summe $a + b$ nennt Leibniz den Verwandtschaftsgrad. Will man bei einem vorgegebenen Verwandtschaftsgrad $n$ die Anzahl der möglichen verwandtschaftlichen Beziehungen in der Seitenlinie[5]) (Gradus transversalis) bestimmen, so braucht man nur die Anzahl der Kompositionen der Zahl $n$ der Form $n = a + b$ zu berechnen, also $k(n, 2) = n - 1$. Leibniz bleibt aber nicht bei diesem Ergebnis stehen; er schreibt[6]): «Hac occasione obiter explicandum est, quæ sint dati numeri discerptiones, Zerfällungen, possibiles. Nam omnes quidem discerptiones sunt complexiones...». Unter Complexiones einer Menge von $n$ Elementen versteht Leibniz die Gesamtheit aller möglichen Kombinationen von $n$ Elementen zur $k$-ten Klasse, wobei $k$ die Werte von $1, 2, \ldots, n$ durchläuft[7]). Discerptio oder Zerfällung nennt er allgemein eine additive Zerlegung in natürliche Zahlen. In der eben zitierten Stelle gebraucht er den Ausdruck unter Berücksichtigung der Reihenfolge. Daß jede Discerptio eine Complexio ist, ersieht man leicht aus der Herleitung von (1.1). Dort stellten wir fest, daß jede Komposition von $n$ aus $k$ Summanden einer Kombination von $n - 1$ Elementen zur $(k - 1)$-

[2]) Chr. Huygens, *De ratiociniis in ludo aleæ*, Prop. IX, in Fr. van Schooten, *Exercitationum mathematicarum libri quinque*, p. 529 = Oeuvres de Huygens XIV, pp. 76–79.

[3]) C. I. Gerhardt, *Leibnizens mathematische Schriften* V, pp. 53–60; das Problem lautet: «Dato numero classium et rerum in classibus, complexiones classium invenire».

[4]) C. I. Gerhardt, *Leibnizens mathematische Schriften* V, pp. 56–60.

[5]) Auch verwandtschaftliche Beziehungen in der Hauptlinie könnten durch ein Zahlenpaar dargestellt werden; eine der beiden Zahlen wäre dann 0. Die Verwandtschaft mit sich selbst ergäbe schlußendlich (0,0).

[6]) C. I. Gerhardt, *Leibnizens mathematische Schriften* V, p. 59.

[7]) C. I. Gerhardt, *Leibnizens mathematische Schriften* V, pp. 14–15.

ten Klasse gleichkommt; man hat sich unter den zu kombinierenden Elementen nur die zwischen $n$ Punkten zu ziehenden Striche vorzustellen. Auf die Ansätze der schwierigeren Partitionstheorie bei Leibniz treten wir hier nicht näher ein[8]). Es darf aber hervorgehoben werden, daß Leibniz als erster die Bedeutung der Kompositionen und Partitionen, besonders im Hinblick auf die Zahlentheorie, erkannt hat[9]). Eine systematische Ausweitung seiner Ansätze finden wir bereits bei Euler vor[10]).

An die spezielle Problemstellung von Huygens, der wir uns nun ausschließlich zuwenden, hat als erster Jakob Bernoulli im ersten Teil seiner *Ars Conjectandi* angeknüpft[11]). Er hat die Aufgabe auf $p$ Würfel ausgedehnt: auf wie viele Arten kann man jede mögliche Punktezahl $n$ mit $p$ 6seitigen Würfeln erreichen? Es handelt sich hier um die Komposition einer Zahl $n$ $(p \leq n \leq 6\,p)$ von der Form $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_p$, wobei die $a_i \leq 6$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$. Zur Berechnung der zugehörigen Anzahlwerte $k_6(n, p)$ findet Bernoulli ein Bildungsschema, das auf der folgenden Beziehung, die er zwar nicht erwähnt, beruht:

$$k_6(n, p) = k_6(n-1, p-1) + k_6(n-2, p-1) + \cdots + k_6(n-6, p-1)\,. \qquad (1.2)$$

Dies ist leicht einzusehen: Wir betrachten die möglichen Ergebnisse 1, 2, . . . , 6 eines bestimmten Würfels; die entsprechenden Gesamtpunktezahlen der übrigen $p-1$ Würfel müssen dann $n-1$, $n-2$, . . . , $n-6$ betragen, damit die Gesamtpunktezahl aller $p$ Würfel $n$ ergibt. Die sechs Summanden auf der rechten Seite von (1.2) stellen die zugehörigen Anzahlwerte dar. Dabei ist zu beachten, daß einige Summanden verschwinden können; dies gilt für die Fälle $n < p + 5$ oder $n > 6\,p - 5$. Das hieraus resultierende Bildungsschema sieht wie folgt aus:

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | |
| | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | |
| | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | |
| II | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | |
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | |
| | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | |
| | | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | |
| III | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 25 | 27 | 27 | 25 | 21 | 15 | 10 | 6 | 3 | 1 |

[8]) Wir verweisen hier auf D. Mahnke, *Leibniz auf der Suche nach einer allgemeinen Primzahlgleichung*. Bibliotheca Mathematica (3) *13*, 29–61 (1912).

[9]) Leibniz schreibt im Brief vom 28. 7. 1699 an Johann Bernoulli: «An unquam considerasti numerum discerptionum vel divulsionum numeri dati, quot scilicet modis possit divelli in partes duas, tres etc. Videtur mihi ejus determinatio non facilis, et tamen digna quæ habeatur.» (C. I. Gerhardt, *Leibnizens mathematische Schriften* III, p. 601.)

Die Zeile I stellt die Anzahlwerte $k_6(1, 1), k_6(2, 1), \ldots, k_6(6, 1)$ dar. Schreibt man diese Zeile sechsmal untereinander, jede folgende Zeile um eine Position nach rechts rückend, und summiert man die vertikal übereinanderstehenden Werte, so resultiert daraus die Zeile II, die die Werte $k_6(2, 2), k_6(3, 2), \ldots, k_6(12, 2)$ enthält. Durch Anwendung desselben Verfahrens auf Zeile II gelangt man zu Zeile III mit den Werten $k_6(3, 3), k_6(4, 3), \ldots, k_6(18, 3)$ usw. Die zu summierenden vertikalen Zahlen stellen nichts anderes als die Summanden der rechten Seite von (1.2) dar.

In der ersten Auflage seines *Essays* greift Montmort ebenfalls das von Huygens gestellte Problem auf[12]). Er begnügt sich jedoch damit, alle Anzahlwerte für jede mögliche Punktezahl bis zu neun Würfeln in einer Tabelle zusammenzustellen, ohne auch nur anzudeuten, wie er sie berechnet hat. Die Formel teilt er erst im Brief vom 11. 11. 1710 an Johann Bernoulli mit[13]). In der zweiten Auflage erscheint die Formel sogar unter der allgemeineren Voraussetzung $f$-seitiger Würfel[14]); sie lautet:

$$\left.\begin{aligned} k_f(n, p) = \binom{n-1}{p-1} - p\binom{n-f-1}{p-1} + \binom{p}{2}\binom{n-2f-1}{p-1} - \cdots \\ + (-1)^s \binom{p}{s}\binom{n-sf-1}{p-1}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

wobei die Anzahl $s + 1$ der Glieder durch die Bedingungen $n - sf \geqslant p$ und $n - (s + 1)f < p$ bestimmt wird. Daran anschließend führt Montmort einen langen Beweis[15]), den wir hier in modernerer Form wiedergeben wollen.

Der erste Schritt besteht darin, zu bestimmen, auf wie viele Arten sich die Zahl $n$ aus $p$ beliebigen natürlichen Zahlen $a_i$ zusammensetzen läßt; die Einschränkung $a_i \leq f$ soll also nicht gelten. Montmort gelangt zum Anzahlwert $k(n, p) = \binom{n-1}{p-1}$, den wir bereits in (1.1) angetroffen haben, durch Schluß von $p = 1$ auf $p = 2$ und von $p = 2$ auf $p = 3$, worauf er sogleich verallgemeinert. Der Induktionsschluß von $p$ auf $p + 1$ geht wie folgt vor sich: Bei $p = 1$ gibt es für beliebige $n$ einen einzigen Fall, was mit $k(n, 1) = \binom{n-1}{0} = 1$ übereinstimmt. Wir berechnen nun $k(n, p + 1)$ unter der Voraussetzung, daß $k(n, p) = \binom{n-1}{p-1}$ richtig ist. Betrachten wir zuerst die Fälle $1, a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}$, so ersehen wir nach Induktionsvoraussetzung, daß in der Wahl der $a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}$ noch $k(n - 1, p) = \binom{n-2}{p-1}$ Fälle möglich sind. Bei der Anordnung $2, a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}$ gibt es $k(n - 2, p) = \binom{n-3}{p-1}$ Möglichkeiten und all-

[10]) L. Euler, *Observationes analyticæ variæ de combinationibus*. Comm. Acad. Petr. *13*, 64–93 (1741–1743) = *Opera* I.2, pp. 163–193. *De partitione numerorum*. Nov. Comm. Acad. Petr. *3*, 125–169 (1750/51) = *Opera* I.2, pp. 254–294. *De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas*. Nov. Comm. Acad. Petr. *14*, 168–187 (1769/I) = *Opera* I.3, pp. 131–147.

[11]) Jakob Bernoulli, *Ars Conjectandi*, pp. 21–25.

[12]) *Essay* 1°, Prop. XXXI, p. 141: «On demande en combien de façons on peut amener un certain nombre ou point déterminé, avec un certain nombre de dez.»

[13]) *Essay* 2°, p. 307.

[14]) *Essay* 2°, p. 46.

[15]) *Essay* 2°, Prop. XVI, pp. 46–59.

gemein bei der Anordnung $i, a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}$ $(1 \leq i \leq n-p)$ in analoger Weise $k(n-i, p) = \binom{n-i-1}{p-1}$ Möglichkeiten. Führt man diesen Prozeß bis zu $i = n-p$ durch, so gelangt man schließlich durch Summierung zu

$$k(n, p+1) = \sum_{i=1}^{n-p} k(n-i, p) = \sum_{i=1}^{n-p} \binom{n-i-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}.$$

Der zweite Schritt geht vom Wert $\binom{n-1}{p-1}$ aus und führt mittels der Korrekturen, die wegen der Einschränkung $a_i \leq f$ notwendig sind, zur Gleichung (1.3). Von $k(n, p) = \binom{n-1}{p-1}$ müssen alle Fälle mit irgendeinem $a_i > f$ abgezogen werden. Betrachten wir zuerst die Fälle mit $a_1 > f$, während die anderen $a_i$ $(i = 2, 3, \ldots, p)$ beliebig sein können. Es sind soviele Fälle, als es Möglichkeiten gibt, die Zahl $n-f$ aus $p$ beliebigen natürlichen Zahlen zusammenzusetzen, also $k(n-f, p) = \binom{n-f-1}{p-1}$. Da dasselbe auch von allen anderen $a_i$ gilt, so müssen $p\binom{n-f-1}{p-1}$ Fälle vom Wert $\binom{n-1}{p-1}$ subtrahiert werden. Dieses Korrekturglied ist jedoch zu hoch; denn bedenkt man, daß in ein und derselben Komposition zwei Zahlen $a_i$ und $a_j$ beide $> f$ sein können, so ersieht man aus den vorigen Überlegungen, daß eine solche Komposition im vorhergehenden Korrekturglied doppelt enthalten ist. Deshalb muß die Anzahl aller Anordnungen mit zwei $f$ übersteigenden Zahlen zum Wert $\binom{n-1}{p-1} - p\binom{n-f-1}{p-1}$ addiert werden. Ihre Anzahl entspricht aber der Anzahl von Kompositionen der Zahl $n-2f$ in $p$ beliebige Summanden. Die zwei $f$ übersteigenden Glieder können nun auf $\binom{p}{2}$ Arten gewählt werden, so daß das neue Korrekturglied $+\binom{p}{2}\binom{n-2f-1}{p-1}$ beträgt. In analoger Weise wird das nächste Korrekturglied, $-\binom{p}{3}\binom{n-3f-1}{p-1}$, ermittelt. Diese Korrektur wird fortgesetzt, bis man zur größtmöglichen Anzahl der $a_i$, die $f$ übersteigen, gelangt; hieraus resultiert Formel (1.3), womit Montmorts Beweis zu Ende geführt ist. Daß wirklich jede Komposition mit Summanden, die größer als $f$ sind, in dieser Formel genau einmal von $\binom{n-1}{p-1}$ subtrahiert werden, wollen wir zur Vervollständigung des Beweises im Falle einer bestimmten Komposition mit genau $k$ Summanden, die größer als $f$ sind, zeigen. Das erste Korrekturglied $p\binom{n-f-1}{p-1}$ zählt diesen Fall $k$-mal, das zweite Korrekturglied $\binom{k}{2}$-mal ... und das $k$-te Glied $\binom{k}{k}$-mal. Unter Berücksichtigung des Vorzeichens beträgt die Korrektur, die von einer einzigen solchen Komposition herrührt, $-\binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} = (1-1)^k - 1 = -1$; damit ist (1.3) vollständig bewiesen.

Schon zwei Jahre vor dem Erscheinen der zweiten Auflage von Montmorts *Essay*, jedoch ein Jahr nach dessen brieflicher Mitteilung der Formel (1.3) an Johann Ber-

noulli hat de Moivre dieselbe Formel ohne Beweis veröffentlicht[16]), während er seine Beweisführung erst 1730 bekanntgab[17]). Er geht dabei vom Ausdruck $(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^f)^p$ aus. Das Problem besteht nun darin, in der Entwicklung dieses Ausdrucks für ein vorgegebenes $n$ den Koeffizienten von $x^n$ zu bestimmen. Damit gleichbedeutend ist wegen

$$(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^f)^p = x^p(1 + x + x^2 + \cdots + x^{f-1})^p = x^p\left(\frac{1 - x^f}{1 - x}\right)^p$$

die Bestimmung des Koeffizienten von $x^{n-p}$ in der Entwicklung von $(1 - x^f)^p(1 - x)^{-p}$. Nach dem allgemeinen binomischen Lehrsatz geht letzterer Ausdruck über in

$$\left[1 - p\,x^f + \binom{p}{2} x^{2f} - \binom{p}{3} x^{3f} + \cdots + (-1)^p \binom{p}{p} x^{pf}\right] \times \left[1 + p\,x + \binom{p+1}{2} x^2 + \binom{p+2}{3} x^3 + \cdots\right];$$

daraus ergibt sich der gesuchte Koeffizient

$$\binom{n-1}{n-p} - p\binom{n-f-1}{n-f-p} + \binom{p}{2}\binom{n-2f-1}{n-2f-p} - \cdots + (-1)^s \binom{p}{s}\binom{n-sf-1}{n-sf-p},$$

wobei die Anzahl $s + 1$ der Glieder durch die Bedingungen $n - sf \geqslant p$ und $n - (s + 1)f < p$ bestimmt wird. Diese Reihe stimmt mit (1.3) überein, wenn man bedenkt, daß

$$\binom{n - if - 1}{n - if - p} = \binom{n - if - 1}{p - 1}.$$

Todhunter, der zwar in seiner *History* die Priorität Montmorts anerkennt[18]), stellt nur de Moivres Beweis dar. Es ist aber aufschlußreich, beide Beweise einander gegenüberzustellen. Hieraus ersehen wir deutlich, mit welch verschiedenen Methoden Montmort und de Moivre gearbeitet haben. De Moivre markiert den Anfang einer neuen Epoche in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Durch die Begründung der erzeugenden Funktion hat er dieser Wissenschaft auf lange Zeit hin einen fruchtbaren Weg gewiesen. Seine neuen formalen Methoden gestatten ihm, wie aus obigem Beweis gut ersichtlich wird, die Lösung klassischer Probleme mit bedeutend kleinerem Gedankenaufwand. Montmorts Hauptwerk hingegen steht am Ende der alten Epoche. Dies muß unbedingt vor Augen gehalten werden, will man seine Leistungen richtig einschätzen. Seine Methoden erforderten eine mühsame Gedankenarbeit, vor der er auch bei recht schwierigen Problemen nicht zurückschreckte. Es muß auch betont werden, daß alte Methoden neben den neuen weiterhin ihre Existenzberechtigung haben können. Es zeigt sich in unserem Beispiel, wie das Mitvollziehen des Beweises von Montmort zu einem unmittelbaren Verständnis der Formel (1.3) führt und jedes Glied darin plausibel wird.

16) A. de Moivre, *De mensura sortis*. Phil. Transact. *27*, 220–222 (1711).
17) A. de Moivre, *Miscellanea Analytica*, pp. 191–197.
18) I. Todhunter, *A history of the mathematical theory of probability*, pp. 84–85.

Einige interessante Aspekte bieten die dem Beweis folgenden Corollaires in Montmorts *Essay* 2° [19]). Vorerst erklärt Montmort das Bildungsschema, das wir ebenfalls bei Jakob Bernoulli antreffen (siehe oben). Dieses Verfahren erweist sich besonders dann wertvoll, wenn die Würfel ungleiche Seitenzahlen haben. Im Falle von 5 Würfeln, einem 6seitigen, einem 4seitigen, einem 3seitigen und zwei 2seitigen Würfeln würde das Schema wie folgt aussehen:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | |
| | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | |
| | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | |
| II | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | |
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 | | |
| III | 1 | 3 | 6 | 9 | 11 | 12 | 11 | 9 | 6 | 3 | 1 | | |
| | | 1 | 3 | 6 | 9 | 11 | 12 | 11 | 9 | 6 | 3 | 1 | |
| IV | 1 | 4 | 9 | 15 | 20 | 23 | 23 | 20 | 15 | 9 | 4 | 1 | |
| | | 1 | 4 | 9 | 15 | 20 | 23 | 23 | 20 | 15 | 9 | 4 | 1 |
| V | 1 | 5 | 13 | 24 | 35 | 43 | 46 | 43 | 35 | 24 | 13 | 5 | 1 |

Die unterste Zeile repräsentiert die Anzahl Möglichkeiten, mit den fünf gegebenen Würfeln die Gesamtpunktezahlen $n = 5, 6, \ldots, 17$ zu erreichen. Im Corollaire IV wendet Montmort dieses Beispiel auf das folgende Problem an, das wir sogleich allgemein formulieren wollen:

Es sei eine natürliche Zahl $N$ mit der kanonischen Zerlegung $N = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_s^{m_s}$ gegeben. Jeder Teiler von $N$ kann dann in der Form $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_s^{a_s}$ dargestellt werden, wobei $0 \leq a_i \leq m_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Nun benutzt man für jede der $s$ Primzahlen einen Würfel, wobei der der Primzahl $p_i$ entsprechende Würfel $m_i + 1$ Seiten mit den Nummern $1, 2, \ldots, m_i + 1$ aufweise. Ein Ergebnis $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ eines Wurfes mit den $s$ gegebenen Würfeln symbolisiere den Teiler $p_1^{a_1 - 1} p_2^{a_2 - 1} \ldots p_s^{a_s - 1}$. Die speziellen Ergebnisse $(1, 1, \ldots, 1)$ bzw. $(m_1 + 1, m_2 + 1, \ldots, m_s + 1)$ stellen die «1» bzw. die Zahl $N$ selbst dar. Montmorts Problem besteht darin, zu bestimmen, wie viele Teiler von $N$ von der «Dimension» $d$ sind, das heißt der Bedingung $a_1 + a_2 + \cdots + a_s = d$ genügen, wobei $d$ beliebig vorgegeben und $0 \leq d \leq \sum_{i=1}^{s} m_i$.

Das gleiche Problem kann, auf die $s$ Würfel übertragen, auch wie folgt formuliert werden: Auf wie viele Arten kann man mit $s$ Würfeln die Gesamtpunktezahl $d + s$ erreichen? Als Beispiel diene eine Zahl mit der folgenden kanonischen Zerlegung: $N = p_1^5 p_2^3 p_3^2 p_4 p_5$; es entspricht dem oben beschriebenen Beispiel, auf das die Tabelle angewendet wurde. Während dort die unterste Zeile die Anzahl aller möglichen

[19]) *Essay* 2°, pp. 51–59.

Würfe mit einer Gesamtpunktezahl $n = 5, 6, \ldots, 17$ ausdrückt, stellt sie hier die Anzahl der Teiler von der Dimension $d = 0, 1, 2, \ldots, 12$ dar.
Was die weitere Entwicklung der Erforschung der Anzahl der Kompositionen betrifft, so darf auf eine Abhandlung Eulers hingewiesen werden[20]), die ausschließlich das Problem in der Form, wie es Montmort gestellt hat, behandelt. Euler findet die Rekursionsformel[21]), die, in unsere Bezeichnungsweise übersetzt, wie folgt lautet:

$$k_f(n+1, p) = k_f(n, p) + k_f(n, p-1) - k_f(n-f, p-1) .$$

Abschließend sei auf die schöne Darstellung von Laplace hingewiesen[22]), in der er nach Herleitung der Formel (1.3) auf infinitesimale Betrachtungen übergeht und die Resultate auf die Fehlerrechnung anwendet[23]).

## 2. ÜBER POTENZEN VON POLYNOMEN

Ein Würfelproblem, das im Briefwechsel an zahlreichen Stellen auftaucht und mit Cas déterminés und Cas indéterminés bezeichnet wird, hängt eng mit der Bestimmung der verschiedenen Koeffizienten beim Potenzieren von Polynomen zusammen. Beginnen wir mit dem speziellen Problem, dem

a. «*Problème des cas déterminés*»

In moderner Ausdrucksweise lautet das Problem folgendermaßen: Es werden $p$ Würfel geworfen, von denen jeder $f$ Seiten mit den Zahlen $1, 2, \ldots, f$ hat. Man berechne die Anzahl der Möglichkeiten, daß dabei eine vorgegebene Zahl $p_1$-mal, eine zweite (vorgegebene) $p_2$-mal ... und eine $r$-te $p_r$-mal erscheint ($\sum_{i=1}^{r} p_i = p$). Im *Essay* 1° behandelt Montmort nur den allgemeinen Fall der Cas indéterminés[24]), weist jedoch darauf hin, daß die dafür aufgestellte Formel (1.6) auch auf den Spezialfall der Cas déterminés angewendet werden könne. Für beide Fälle hat er eine lange Reihe von Beispielen durchgerechnet und in einer Tabelle zusammengestellt. Johann Bernoulli schreibt im Brief vom 17. 3. 1710 an Montmort, diese Anzahl, die wir mit $C$ bezeichnen, könne durch den Ausdruck

$$C = \frac{p!}{p_1!\, p_2! \ldots p_r!} \tag{1.4}$$

20) L. Euler, *De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas*. Nov. Comm. Acad. Petr. *14*, 168–187 (1769/I) = *Opera* I.3, pp. 131–147.
21) L. Euler, *De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas*, p. 181 = *Opera* I.3, p. 142.
22) Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, pp. 253ff. Laplace gebraucht ein Urnenmodell: «Une urne étant supposée contenir $n + 1$ boules, distinguées par les n$^{os}$ 0, 1, 2, 3, ..., $n$; on en tire une boule que l'on remet dans l'urne après le tirage. On demande la probabilité qu'après $i$ tirages, la somme des nombres amenés sera égale à $s$.» (p. 253).
23) Siehe auch Todhunters *History*, pp. 541ff.
24) *Essay* 1°, Prop. XXX, pp. 136–144.

dargestellt werden[25]). Bernoulli fügt bei, daß dieses Resultat auch den Koeffizienten von $x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_r^{p_r}$ in der Entwicklung des Polynoms $(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^p$ darstelle, wobei $x_i$ den $p_i$-mal zu potenzierenden Summanden darstellen soll ($i = 1, 2, \ldots, r$). In dieser Form habe er das Problem früher gelöst, nachdem es ihm von Leibniz gestellt worden sei. Bernoulli bezieht sich hier auf Leibnizens Brief vom 6./16. 5. 1695 und auf seine Antwort an Leibniz mit der richtigen Lösung vom 8./18. 6. 1695[26]). Das Problem ist Leibniz beim Differentialkalkül aufgetaucht. Er hatte in bezug auf die Koeffizienten den Zusammenhang zwischen den Differentialen von Produkten aus Funktionen und den Potenzen aus Polynomen klar erkannt. Die nach ihm benannte Leibnizsche Regel

$$d^m(x\,y) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} d^{m-k} x\, d^k y\,,$$

wobei $x$ und $y$ Funktionen ein und derselben Variablen sind und $d^0x$ und $d^0y$ die Funktion $x$ bzw. $y$ selbst bedeuten, ist nur ein Spezialfall für ein Produkt aus zwei Funktionen.

Im *Essay* 2° trennt Montmort die beiden Fälle der Cas déterminés und der Cas indéterminés. Beim Spezialfall der Cas déterminés steht die Formel

$$C = \binom{p}{p_1} \binom{p-p_1}{p_2} \binom{p-p_1-p_2}{p_3} \cdots \binom{p \quad p_1-p_2-\cdots-p_{r-1}}{p_r}, \tag{1.5}$$

die mit (1.4) äquivalent ist.

b. «*Problème des cas indéterminés*»

Das allgemeinere Problem der Cas indéterminés ist recht kompliziert. Montmort löst es schon im *Essay* 1° [27]). Seine schwer verständliche Darstellung wollen wir in moderner Schreibweise wiedergeben: Es werden $p$ Würfel geworfen, von denen jeder $f$ Seiten mit den Zahlen $1, 2, \ldots, f$ hat. Man berechne die Anzahl der Möglichkeiten, daß $m_1$ dieser Zahlen je genau $k_1$-mal, $m_2$ dieser Zahlen je $k_2$-mal ... und $m_s$ dieser Zahlen je $k_s$-mal erscheinen, wobei $\sum_{i=1}^{s} m_i k_i = p$[28]). Zur Veranschaulichung diene ein Beispiel: Es sollen beim Wurf mit 8 gewöhnlichen ($f = 6$) Würfeln zwei Zahlen je dreimal und eine Zahl zweimal erscheinen (ein solches Ergebnis wäre zum Beispiel 1 1 1 4 4 5 5 5). Hier gilt $m_1 = 2$, $k_1 = 3$ und $m_2 = 1$, $k_2 = 2$. Bezeichnen wir wieder die Anzahl aller Möglichkeiten mit $C$, so folgt nach Montmort[29]):

$$C = \binom{f}{m_1} \binom{f-m_1}{m_2} \binom{f-m_1-m_2}{m_3} \cdots \binom{f-\sum_{i=1}^{s-1} m_i}{m_s} \frac{p!}{(k_1!)^{m_1} (k_2!)^{m_2} \ldots (k_s!)^{m_s}}\,. \tag{1.6}$$

[25]) Diese Briefstelle ist abgedruckt in *Essay* 2°, p. 291, und in den *Opera* Johannis Bernoulli I, p. 461.

[26]) Diese Briefe sind gedruckt in C. I. Gerhardt, *Leibnizens mathematische Schriften* III, pp. 174ff.

[27]) *Essay* 1°, Prop. XXX, pp. 136–144.

[28]) Anstelle der Symbole $m_i$ bzw. $k_i$ gebraucht Montmort die Symbole $b, c, d, \ldots$ bzw. $B, C, D, \ldots$; die Seitenzahl $f$ bezeichnet er mit $R$.

Den Beweis liefert uns Montmort erst in der zweiten Auflage[30]; er lautet in moderner Form:

$$\binom{f}{m_1}\binom{f-m_1}{m_2}\binom{f-m_1-m_2}{m_3}\cdots\binom{f-\sum_{i=1}^{s} m_i}{m_s}$$

und drückt die Anzahl Möglichkeiten aus, unter den $f$ Zahlen des Würfels $m_1, m_2, \ldots, m_s$ Zahlen auszuwählen. Es ergeben sich nämlich $\binom{f}{m_1}$ Fälle, zuerst die $m_1$ verschiedenen Zahlen zu wählen, die alle $k_1$-mal auftreten sollen. In analoger Weise können nachher auf $\binom{f-m_1}{m_2}$ verschiedene Arten die $m_2$ Zahlen gewählt werden, die $k_2$-mal auftreten sollen usw. Für jede solche Wahl gibt es

$$\frac{p!}{(k_1!)^{m_1}(k_2!)^{m_2}\ldots(k_s!)^{m_s}}$$

Möglichkeiten, die betreffenden Zahlen den $p$ Würfeln zuzuordnen; dies folgt aus (1.4). Montmort vereinigt alle Zahlen, die gleich oft ($k_i$-mal) vorkommen, in einer Gruppe; jede solche Gruppe enthält $m_i$ Zahlen ($i = 1, 2, \ldots, s$). Wir wollen nun für Häufigkeiten, mit denen Zahlen aus derselben Gruppe auftreten, nicht mehr die gleichen Symbole $k_i$ verwenden. Für die $k_1$ gebrauchen wir die Symbole $p_1, p_2, \ldots, p_{m_1}$, für die $k_2$ die Symbole $p_{m_1+1}, p_{m_2+2}, \ldots, p_{m_1+m_2}$ usw. Mit der neuen Folge von Häufigkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_r$, wobei $p_r = p_{m_1+m_2+\ldots m_r}$, geht (1.6) über in

$$C = \binom{f}{m_1}\binom{f-m_1}{m_2}\binom{f-m_1-m_2}{m_3}\cdots\binom{f-\sum_{i=1}^{s-1} m_i}{m_s}\frac{p!}{p_1!\,p_2!\ldots p_r!}\,. \tag{1.7}$$

Im Brief vom 17. 3. 1710 an Montmort steht Johann Bernoullis Lösung des Problems, die aus (1.7) folgt und der nachstehenden Formel entspricht[31]:

$$C = \frac{f(f-1)(f-2)\ldots(f-\sum_{i=1}^{s} m_i + 1)}{m_1!\,m_2!\ldots m_s!}\,\frac{p!}{p_1!\,p_2!\ldots p_r!}\,. \tag{1.8}$$

Man kann sie auf eine elegantere Form bringen, wenn man als weitere Größe $m_0$ einführt, worunter die Anzahl der überhaupt nicht erscheinenden Zahlen zu verstehen ist. Es gilt dann $\sum_{i=0}^{s} m_i = f$, und (1.8) geht über in

$$C = \frac{f!}{m_0!\,m_1!\,m_2!\ldots m_s!}\,\frac{p!}{p_1!\,p_2!\ldots p_r!}\,. \tag{1.9}$$

[29] *Essay* 1°, pp. 136/137; die Formel ist zwar dort mit einem Fehler behaftet, auf den Niklaus Bernoulli im Brief vom 26. 2. 1711 hinweist. Statt $(k_1!)^{m_1}(k_2!)^{m_2}\ldots(k_s!)^{m_s}$ steht bei Montmort ein Ausdruck, der der Größe $m_1 k_1!\, m_2 k_2!\ldots m_s k_s!$ entspricht. Da aber die Zahlenwerte in der darauffolgenden Tabelle richtig sind, wird Montmort wohl nach Formel (1.6) gerechnet haben.

[30] *Essay* 2°, p. 45.

[31] Diese Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, p. 292, und in den *Opera* Johannis Bernoulli I, p. 462.

Durch Umformung des zweiten Teils von (1.7) gelangt man auch zu

$$C = \left[\binom{f}{m_1}\binom{f-m_1}{m_2}\binom{f-m_1-m_2}{m_3}\cdots\binom{f-\sum_{i=1}^{s-1} m_i}{m_s}\right] \times \left[\binom{p}{p_1}\binom{p-p_1}{p_2}\binom{p-p_1-p_2}{p_3}\cdots\binom{p-\sum_{i=1}^{r-1} p_i}{p_r}\right], \tag{1.10}$$

einer Darstellung, die Montmort im folgenden Brief vom 11. 11. 1710 gebraucht und in das *Essay* 2° aufnimmt[32]).

## 3. DAS PROBLEM DER RENCONTRES

Das Rencontre-Problem fällt in das Gebiet der Permutationen und kann in der folgenden Weise formuliert werden: Wie viele unter den $n!$ Permutationen der $n$ Elemente $1, 2, \ldots, n$ sind so beschaffen, daß kein Element seinen natürlichen Platz einnimmt? Eine Permutation von $n$ Elementen, von denen genau $k$ Elemente ihren natürlichen Platz einnehmen, nennen wir eine Permutation mit genau $k$ Normalstellen; die Anzahl solcher Permutationen werde mit $P_n^{(k)}$ bezeichnet, während $P_n^{(k+)}$ die Anzahl der Permutationen mit mindestens $k$ Normalstellen bedeute[33]).

Unter dem Ausdruck Rencontre dürfte das Problem erstmals 1751 bei Euler aufgetreten sein[34]). Hingegen hat sich schon Montmort im *Essay* 1°, bei der Untersuchung des Treize-Spieles[35]), eingehend mit dem Problem befaßt. Seine Formeln (1.11) und (1.12) beziehen sich auf den Spezialfall, in dem zwei Spielpartner, der Bankhalter (le banquier) und der Spieler (le ponte), beteiligt sind. Der Bankhalter besitzt die 13 Karten einer Farbe des französischen Kartenspiels, mit den Zahlen 1–10 und den 3 Bildern, die wir uns der Einfachheit halber als «11», «12» und «13» vorstellen. Von diesen 13 Karten deckt der Bankhalter eine nach der andern auf. Wenn mindestens eine der 13 gezogenen Karten die dem Ziehungsrang entsprechende Zahl aufweist, gewinnt der Bankhalter, andernfalls der Spieler. An Stelle von 13 Karten werde eine beliebige Anzahl $n$ von Karten mit den Nummern $1, 2, \ldots, n$ angenommen. Schreibt man die $n$ Nummern der gezogenen Karten in der Reihenfolge der Ziehung auf, so kann man sich jedes Spielergebnis als Permutation der Elemente $1, 2, \ldots, n$ vorstellen. Der Bankhalter gewinnt dann und nur dann, wenn die Permutation mindestens eine Normalstelle aufweist. Montmorts Berechnungen betreffen die Hoffnung (sort) des Bankhalters, die gleich seiner Gewinnwahrscheinlichkeit ist, wenn der gesamte Geldeinsatz (argent du jeu) «1» gesetzt wird. Montmort findet für die Hoffnung, die bei $n$ Karten mit $s_n$ bezeichnet werde, die folgende rekursive Beziehung[36]):

$$s_n = \frac{s_{n-1}(n-1) + s_{n-2}}{n}, \tag{1.11}$$

[32]) *Essay* 2°, p. 44; die Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, p. 305.
[33]) Vgl. E. Netto, *Lehrbuch der Combinatorik*, pp. 66ff.
[34]) L. Euler, *Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre*. Mém. Acad. Berlin *1751*, 255–270 = *Opera* I.7, pp. 11–25.
[35]) *Essay* 1°, pp. 54–64; im *Essay* 2° befindet sich die erweiterte Fassung auf pp. 130–143.
[36]) *Essay* 1°, p. 58.

mit $s_1 = 1$ und $s_2 = 1/2$. Es finden sich in seinem Werk keine Andeutungen, wie er zu seiner Formel gelangt ist; ebenso ohne Beweis führt er eine weitere interessante Darstellung an[37]):

$$s_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}. \tag{1.12}$$

Wegen der Beziehung $s_n = P_n^{(1+)}/n!$ nehmen die Formeln (1.11) und (1.12) auch die folgende Gestalt an:

$$P_n^{(1+)} = (n-1)\,[P_{n-1}^{(1+)} + P_{n-2}^{(1+)}], \tag{1.13}$$

mit $P_1^{(1+)} = 1$ und $P_2^{(1+)} = 1$;

$$P_n^{(1+)} = n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right). \tag{1.14}$$

In den Bemerkungen, die Niklaus Bernoulli über Montmorts *Essay* 1° gemacht und dem Brief von Johann Bernoulli an Montmort vom 17. 3. 1710 beigelegt hat, finden sich auch die Beweise der beiden Formeln (1.11) und (1.12)[38]).
Zuerst leitet Niklaus Bernoulli (1.12) her. Der Grundgedanke seines Beweises besteht darin, die $P_n^{(1+)}$ Permutationen mit mindestens einer Normalstelle in $n$ disjunkte Klassen zu zerfällen. Die $k$-te Klasse ($k = 1, 2, \ldots, n$) soll dadurch charakterisiert werden, daß $k$ am natürlichen Platz steht, die ersten $k-1$ Stellen jedoch keine Normalstellen aufweisen, während die übrigen Stellen beliebig sind. Bezeichnet man die Anzahl der Permutationen, die in diese Klasse fallen, mit $\pi_k(n)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), so gilt $P_n^{(1+)} = \sum_{k=1}^{n} \pi_k(n)$. Die $\pi_k(n)$ werden wie folgt dargestellt:

$$\pi_1(n) = (n-1)!$$

$$\pi_2(n) = (n-1)! - (n-2)!$$

$$\pi_3(n) = (n-1)! - 2(n-2)! + (n-3)!$$

$$\pi_4(n) = (n-1)! - 3(n-2)! + 3(n-3)! - (n-4)!\,.$$

Hieraus folgert Bernoulli

$$\pi_k(n) = (n-1)! - \binom{k-1}{1}(n-2)! + \binom{k-1}{2}(n-3)! - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k-1}{k-1}(n-k)!\,.$$

Der Beweis kann leicht durch vollständige Induktion erbracht werden[39]).

[37]) *Essay* 1°, p. 59.
[38]) Diese Bemerkungen sind gedruckt in *Essay* 2°, pp. 299–303; zu den Beweisen siehe pp. 301/302.
[39]) Vgl. dazu Todhunter in seiner *History*, pp. 91–93.

Niklaus Bernoullis Beweis von Formel (1.11) wollen wir im Prinzip unverändert, jedoch in der Sprache der Kombinatorik führen: Unter die Anzahl $P_n^{(1+)}$ fallen alle $(n-1)!$ Permutationen, die das Element «1» an erster Stelle aufweisen. Vertauscht man bei diesen Permutationen die «1» sukzessive mit den andern $n-1$ Elementen, so gehen daraus alle übrigen Permutationen hervor. Die $P_{n-1}^{(1+)}$ Permutationen, die mit «1» beginnen und deren $n-1$ übrige Elemente mindestens eine Normalstelle aufweisen, gehen bei den je $n-1$ Vertauschungen in Permutationen mit mindestens einer Normalstelle über; eine Ausnahme bilden jedoch die $(n-1)\cdot P_{n-2}^{(0)}$ Fälle, in denen das mit der «1» zu vertauschende Element die einzige Normalstelle der $n-1$ letzten Elemente war (zum Beispiel bei $1\,4\,3\,5\,6\,2 \rightarrow 3\,4\,1\,5\,6\,2$). Formelmäßig bedeutet dies

$$P_n^{(1+)} = (n-1)! + (n-1)\,[P_{n-1}^{(1+)} - P_{n-2}^{(0)}]\,,$$

woraus wegen $P_{n-2}^{(0)} = (n-2)! - P_{n-2}^{(1+)}$ die Formel (1.13) folgt.

Am Schluß seiner Beweise erklärt Niklaus Bernoulli, wie (1.12) direkt aus (1.11) hergeleitet werden kann. Bringt man nämlich (1.11) in die Form $s_n - s_{n-1} = -(s_{n-1} - s_{n-2})/n$ und bildet man aus den Differenzen zweier aufeinanderfolgender Glieder der Folge $s_n$ eine neue Folge, nämlich $d_n = s_{n+1} - s_n$, so geht (1.11) über in $d_{n-1} = -d_{n-2}/n$ mit $d_1 = -1/2$. Durch sukzessives Ersetzen folgt

$$d_{n-1} = -\frac{d_{n-2}}{n} = \frac{d_{n-3}}{n(n-1)} = -\frac{d_{n-4}}{n(n-1)(n-2)} = \cdots = \frac{(-1)^n\, d_1}{n(n-1)(n-2)\ldots 4\cdot 3}$$

und wegen $d_1 = -1/2$

$$d_{n-1} = s_n - s_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\,,$$

woraus mit $s_1 = 1$ die Reihe (1.11) aufgebaut werden kann.
In seinem Brief vom 17. 3. 1710 an Montmort äußert sich Johann Bernoulli über Montmorts Formeln:

«La suite que vous donnés icy pour determiner le sort de Pierre tenant la main au jeu du treize est tres belle et tres curieuse..., j'ay aussi trouvé cette formule, avec une autre qui m'a fourni la meme suite, mais sans changement de signes et qui suppose les sorts des nombres precedens des cartes connus, comme vous allez voir...»[40])

Die Formel, die Johann Bernoulli hier erwähnt, lautet in moderner Gestalt:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \frac{s_{n-1}}{1!} - \frac{s_{n-2}}{2!} - \frac{s_{n-3}}{3!} - \cdots - \frac{s_1}{(n-1)!} - \frac{0}{n!}\,. \quad (1.15)$$

Er wird sie durch die folgende Betrachtungsweise gefunden haben: Man kann die Permutationen mit Normalstellen in $n$ sich gegenseitig ausschließende Mengen gliedern. Zur ersten Menge sollen die Permutationen mit genau einer Normalstelle, zur

[40]) Diese Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, p. 290, und in den *Opera* Johannis Bernoulli I, pp. 459/460.

zweiten jene mit genau zwei Normalstellen und allgemein zur $k$-ten Menge jene mit genau $k$ Normalstellen gehören. Wie leicht einzusehen ist, gilt die Relation

$$P_n^{(k)} = \binom{n}{k} P_{n-k}^{(0)} . \tag{1.16}$$

Es können nämlich $k$ Elemente, die Normalstellen sein sollen, auf $\binom{n}{k}$ verschiedene Arten gewählt werden; jede dieser Möglichkeiten zerfällt noch in die $P_{n-k}^{(0)}$ Fälle, in denen die übrigen $n - k$ Elemente auf $P_{n-k}^{(0)}$ Arten angeordnet werden können, ohne eine Normalstelle aufzuweisen. Mit $P_n^{(1+)} = \sum_{k=1}^{n} P_n^{(k)}$ folgt

$$P_n^{(1+)} = \binom{n}{1} P_{n-1}^{(0)} + \binom{n}{2} P_{n-2}^{(0)} + \cdots + \binom{n}{n} P_0^{(0)} . \tag{1.17}$$

Dividiert man auf beiden Seiten durch $n!$, so erhält man

$$s_n = \frac{1 - s_{n-1}}{1!} + \frac{1 - s_{n-2}}{2!} + \cdots + \frac{1 - s_0}{n!} , \tag{1.18}$$

wobei $s_0 = 0$. Daraus folgt sogleich Johann Bernoullis Formel (1.15)[41].
Mehr als zwei Jahre haben Montmort und Johann Bernoulli nicht mehr über das Treize-Spiel korrespondiert. Erst im Brief Montmorts an Johann Bernoulli vom 5. 12. 1712[42] ist davon wieder die Rede, vielleicht im Zusammenhang mit der Absicht Montmorts, eine Neuauflage seines Werkes vorzubereiten. Montmort stellt für $P_n^{(1+)}$ eine Formel auf, die nach folgendem Prinzip aufgebaut ist:

$$P_n^{(1+)} = \binom{n}{0} P_0^{(0)} + \binom{n}{1} P_1^{(0)} + \binom{n}{2} P_2^{(0)} + \cdots + \binom{n}{n-1} P_{n-1}^{(0)} . \tag{1.19}$$

Die $P_k^{(0)}$ stellt Montmort in Gestalt von Reihen dar, die allgemein in folgender Weise geschrieben würden:

$$P_k^{(0)} = [0 + 1 - k + k(k-1) - k(k-1)(k-2) + \cdots + k(k-1) \ldots 4 \cdot 3] (-1)^k .$$

Diese Reihe stimmt mit der Komplementärform von (1.14),

$$P_k^{(0)} = k! \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k!}\right) , \tag{1.20}$$

überein, wobei die Summierung in umgekehrter Reihenfolge geschieht.
Interessanter ist das Bildungsgesetz der $P_k^{(0)}$, das Johann Bernoulli in seiner Antwort vom 2. 2. 1713 an Montmort mitteilt. Es beruht auf der Beziehung

$$P_k^{(0)} = (k-1) [P_{k-1}^{(0)} + P_{k-2}^{(0)}] , \tag{1.21}$$

41) Eine andere Herleitung findet sich bei Todhunter in seiner *History*, p. 115.
42) Dieser wie auch die beiden nachfolgenden Briefe, von denen hier die Rede ist, sind in *Essay* 2° nicht gedruckt.

mit $P_0^{(0)} = 1$ und $P_1^{(0)} = 0$. Es stellt die Komplementärform dar zu

$$P_k^{(1+)} = (k-1)\,[P_{k-1}^{(1+)} + P_{k-2}^{(1+)}]\,.$$

(1.21) folgt aus (1.13) durch einfache Umformungen unter Berücksichtigung von $P_k^{(0)} = k! - P_k^{(1+)}$. Die Zahlenfolge $P_k^{(0)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ lautet dann 1, 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, ....

In seiner Antwort vom 5. 3. 1713 teilt Montmort die auf (1.13) beruhende Zahlenfolge $P_k^{(1+)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ mit, die komplementär zu $k!$ sei. In demselben Briefe stellt er noch ein weiteres Bildungsgesetz der $P_k^{(1+)}$ auf:

$$P_k^{(1+)} = k \cdot P_{k-1}^{(1+)} + (-1)^{k+1}\,. \tag{1.22}$$

Diese Gleichung kann aus (1.14) wie folgt hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} P_k^{(1+)} &= k!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\right) \\ &= k(k-1)!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{k}}{(k-1)!}\right) + k!\,\frac{(-1)^{k+1}}{k!} \\ &= k\,P_{k-1}^{(1+)} + (-1)^{k+1}\,. \end{aligned}$$

In einer anderen Richtung verläuft Montmorts Korrespondenz mit Niklaus Bernoulli auf dem Gebiet des Rencontre-Problems. Schon im Brief vom 11. 11. 1710 an Johann Bernoulli gibt Montmort ein Ergebnis an[43]), das den folgenden allgemeinen Fall betrifft: Es seien $n$ Karten gegeben, von denen je $p$ Karten dieselbe Nummer tragen. Es kommen insgesamt die Nummern $1, 2, \ldots, m$ vor, wobei $m = n/p$. Nun werden nacheinander $m$ Karten gezogen und die zugehörigen Zahlen nacheinander aufgeschrieben. Montmorts Zahlenwert stellt die Wahrscheinlichkeit $s_{n\,p}$ dar, daß die daraus hervorgehende Permutation mindestens eine Normalstelle aufweist, und zwar für $n = 52$, $p = 4$ und folglich $m = 13$, wie es beim vollen französischen Kartenspiel zutrifft. Im Brief vom 10. 4. 1711 an Niklaus Bernoulli teilt Montmort eine Formel mit, nach der er den Zahlenwert errechnet habe[44]); sie lautet, wenn man $n - m = q$ setzt,

$$\left.\begin{aligned} s_{n/p} = \Big[&p^m - m\,p^{m-1}(q+1) + \binom{m}{2} p^{m-2}(q+1)\,(q+2) \\ &- \binom{m}{3} p^{m-3}(q+1)\,(q+2)\,(q+3) + \cdots\Big] \frac{(-1)^{m+1}}{n(n-1)\ldots(n-m+1)}\,, \end{aligned}\right\} \tag{1.23}$$

wobei die Reihe $m$ Summanden enthält.

Niklaus Bernoulli hatte bereits im vorangehenden Brief vom 26. 2. 1711 eine Formel aufgestellt, die er versehentlich beim Abschreiben falsch wiedergegeben hatte[45]). Nachdem Montmort die Unrichtigkeit dieser Formel festgestellt hatte, teilte Bernoulli

[43]) Diese Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, p. 304.
[44]) Diese Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, p. 315.
[45]) Diese Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, p. 308.

die richtige Formel im Brief vom 10. 11. 1711 mit[46]); sie weist eine einfachere Gestalt auf:

$$\left.\begin{aligned} s_{n/p} = 1 - \frac{1}{2!}\frac{n-p}{n-1} + \frac{1}{3!}\frac{(n-p)(n-2p)}{(n-1)(n-2)} \\ - \cdots + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\frac{(n-p)(n-2p)\ldots p}{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.24)$$

Daraus ersieht man leichter die Ähnlichkeit mit der Formel (1.12), die als Spezialfall von (1.24) aufgefaßt werden kann, wenn man $p = 1$ und folglich $m = n$ setzt. Den Beweis von (1.24) findet man erstmals bei Struyck[47]).

Abschließend dürfen wir festhalten, daß Montmorts Ansätze des Rencontre-Problems im Laufe weniger Jahre dank seiner ausdauernden Beschäftigung damit und den wertvollen Beiträgen von Johann und Niklaus Bernoulli zu einem ansehnlichen Formelgebäude ausgeweitet wurden. De Moivre hat das Problem erstmals 1718 behandelt[48]) und einen interessanten Zusatz gegeben, den wir kurz beschreiben wollen. Es handelt sich um die folgende Verallgemeinerung des Rencontre-Problems[49]): Es seien $i$ Urnen vorgegeben, die je $n$ Zettel mit den Nummern von 1 bis $n$ enthalten. Nun werden $n$-mal $i$ Karten gezogen, und zwar so, daß bei jedem der $n$ Züge aus jeder Urne genau eine Karte gezogen wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei mindestens einem Zuge alle $i$ Zettel dieselbe Nummer haben. Bei zwei Urnen $U_1$ und $U_2$ geht das Problem über in unser Treize-Spiel. Dazu braucht man nur die Reihenfolge, in der die Nummern der aus der Urne $U_1$ gezogenen Zettel erschienen sind, als die natürliche Reihenfolge anzusehen. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Zettel, die aus der Urne $U_2$ gezogen werden, dieser Reihenfolge entsprechen, ist dieselbe wie die Wahrscheinlichkeit, daß sie in der Reihenfolge der natürlichen Zahlen erscheinen. Von dieser Betrachtungsweise stammt auch der Name Rencontre, der erstmals bei Euler erscheint[50]).

Im Falle von $i$ Urnen steht bei de Moivre die Formel für die Wahrscheinlichkeit, daß bei mindestens einem Zug alle Zettel dieselbe Nummer haben. Sie lautet:

$$\frac{1}{n^{i-2}} - \frac{1}{2!}\frac{1}{n(n-1)^{i-2}} + \frac{1}{3!}\frac{1}{n(n-1)(n-2)^{i-2}} - \cdots .$$

Für $i = 2$ geht die Formel in (1.12) über. Den Beweis finden wir erst bei Laplace[51]). In einer schönen Darstellung erscheint das Rencontre-Problem bei Euler in der eben genannten Abhandlung. Im wesentlichen bietet die Arbeit nichts Neues; ebenso seine

[46]) Diese Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, p. 323.

[47]) N. Struyck, *Uytreekening der kanssen in het speelen*, pp. 96–98 = *Oeuvres*, pp. 102–104.

[48]) A. de Moivre, *The doctrine of chances*, Probl. XXV/XXVI, pp. 59–66.

[49]) A. de Moivre, *The doctrine of chances*, Coroll. VI, p. 66.

[50]) L. Euler, *Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre*. Mém. Acad. Berlin *1751*, 255–270 = *Opera* I.7, pp. 11–25. Euler geht von derselben Betrachtungsweise aus; er schreibt einleitend: «Le jeu de rencontre est un jeu de hazard où deux personnes, ayant chacune un entier jeu de cartes, en tirent à la fois une carte après l'autre, jusqu'à ce qu'il arrive qu'elles rencontrent la même carte; et alors une des deux personnes gagne.»

[51]) P. S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, pp. 224/225. Das Rencontre-Problem wird auf pp. 217–225 behandelt. Hier findet man erstmals infinitesimale Betrachtungen.

spätere Abhandlung[52]), in der er kombinatorische Aspekte des Problems erörtert. Interessant ist die Anwendung Lamberts[53]) (1771) auf die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, mit der eine aufs Geratewohl gemachte Wettervorhersage in Kalendern sich als richtig erweise. Mathematisch bietet die Arbeit nichts Neues, enthält jedoch zum ersten Mal die von Montmort in einem ungedruckten Brief an Johann Bernoulli mitgeteilte Formel (1.22).

[52]) L. Euler, *Solutio quæstionis curiosæ ex doctrina combinationum.* Mém. Acad. Petersb. *3*, 57–64 (1809/10) = *Opera* I.7, pp. 435–440.

[53]) J. H. Lambert, *Examen d'une espece de superstition ramenée au calcul des probabilités.* Nouv. Mém. Acad. Berlin *1771*, 411–420.

Zweiter Teil

# Wahrscheinlichkeitsrechnung

## 1. ÜBERBLICK

Zu Beginn des 18. Jahrhunderts, als Montmort sich mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu beschäftigen begann, befand sich diese Wissenschaft im Anfangsstadium. Ein halbes Jahrhundert zuvor hatten Fermat und Pascal zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten zwei wertvolle Methoden entwickelt, die sie in ihrem berühmten Briefwechsel vom Jahre 1654 einander mitteilten[1]). Diese methodischen Voraussetzungen sowie Ansätze einer axiomatischen Theorie bei Huygens (1657)[2]) schufen ein weites Wirkungsfeld in der konkreten Behandlung von Glücksspielen. Während Fermats kombinatorische Methode Montmort zu interessanten, aus Einzelspielen erwachsenden Problemen angeregt hatte, führte ihn die rekursive Methode Pascals zu Summierungen endlicher und unendlicher Reihen. Montmorts spätere Vorliebe für die Reihenlehre dürfte darauf zurückzuführen sein[3]). Einen ausgezeichneten Einblick in die Anwendung der erwähnten Methoden gewährt die Lösung des Pharao-Spiels (siehe Abschnitt 2). An diesem Beispiel hat Montmort seine Fähigkeiten auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung erprobt. Wie Montmort in der *Préface* zum *Essay* schreibt, habe er sich schon früher mit dem Pharao-Spiel befassen wollen; wegen der großen Zahl von Permutationen bei 52 Karten sei ihm die Lösung unmöglich erschienen, bis er sich, ermutigt durch Jakob Bernoullis Erfolge, daran gewagt habe, und zwar mit größerem Erfolg als erwartet, denn zugleich mit der allgemeinen Lösung des Pharao-Spiels habe er den Weg gefunden, auf dem man andere ähnliche, zum Teil viel schwierigere Probleme lösen könne[4]). Aus seiner Lösung muß geschlossen werden, daß es sich um Pascals rekursive Methode handelt. Daß die kombinatorische Lösung ebenso leicht durchführbar ist, zeigt uns Johann Bernoulli im Briefwechsel.

Der Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat hat nicht nur in methodischer Hinsicht Montmort den Weg gewiesen. Auch der Inhalt, das Problème des partis, eröffnete ihm ein weites Forschungsfeld. Es handelt sich dabei um das Problem, bei einem Spiel, das aus mehreren Partien besteht und abgebrochen wird, bevor ein Spieler die vereinbarte Anzahl von Partien gewonnen hat, die Spieleinsätze in gerechter Weise zu verteilen. In unserem Briefwechsel begegnen wir an manchen Stellen interessanten Verallgemeinerungen dieses Problems, woran Johann und Niklaus Bernoulli in gleichem Maße mitbeteiligt waren (siehe Abschnitt 3).

Gegenüber dem klassischen Problème des partis befaßt sich die fünfte Aufgabe von Huygens mit Spielen, bei denen es nicht bloß darauf ankommt, daß ein Spieler eine

[1]) Dieser Briefwechsel ist gedruckt in *Oeuvres de Pascal* III, pp. 369ff. und in *Oeuvres de Fermat* II, pp. 288ff.

[2]) Chr. Huygens, *De ratiociniis in ludo aleæ*, Prop. I–III, in Fr. van Schooten, *Exercitationum mathematicarum libri quinque*, pp. 521–524 = *Oeuvres de Huygens* XIV, pp. 60-67.

[3]) Siehe Einleitung, Anmerkung 5.

[4]) *Essay* 1°, p. V = *Essay* 2°, p. V.

vorgegebene Anzahl von Partien gewinnt, sondern gegenüber dem Mitspieler einen bestimmten Vorsprung in der Anzahl der gewonnenen Partien erreicht[5]). Die Huygenssche Aufgabe besteht darin, die Gewinnaussichten zweier Spieler zu bestimmen, wenn sie ungleiche Chancen haben, eine einzelne Partie zu gewinnen. Das hieraus resultierende Problem der Spieldauer wurde erstmals von Montmort im *Essay* 1° an einem anderen Beispiel aufgeworfen[6]). Es geht dabei um die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel nach einer bestimmten Anzahl von Partien beendet ist. Die erste allgemeine Lösungsformel finden wir 1711 bei Niklaus Bernoulli in einem Brief an Montmort[7]). Zudem leitet er davon die Lösung der Huygensschen Aufgabe sehr elegant ab. Die historische Entwicklung des Problems der Spieldauer, an der sich de Moivre in hervorragender Weise verdient gemacht hat, ist in jüngster Zeit umfassend erforscht worden[8]). Ebenso sind die Beiträge im Briefwechsel zwischen Montmort und Niklaus Bernoulli, zu denen auch die Behandlung des Problème de la poulle gehört, bereits dargestellt worden[9]), so daß es sich in dieser Arbeit erübrigt, auf diesen Gegenstand näher einzugehen.

Mehrere Stellen im Briefwechsel beziehen sich auf das Kartenspiel Lansquenet. Montmort hat es im *Essay* 1° beschrieben und die Chancen der Spieler für einige Einzelfälle errechnet[10]). Die Fülle an Spielregeln gestattet zwar keine mathematisch saubere Lösung für die Chancenberechnung einer Einzelpartie. Das Spiel bietet aber einen interessanten Aspekt in der Aufeinanderfolge der einzelnen Partien: Es sitzen alle Spieler um einen runden Tisch; jeder von ihnen übt im Spiel eine spezifische Rolle aus, was zur Folge hat, daß die Gewinnaussichten pro Partie von Spieler zu Spieler variieren. Es bestehen nun Regeln, die je nach verlaufener Partie festsetzen, ob bei der nächsten Partie die einzelnen Spieler ihre Rolle behalten oder zyklisch vertauschen müssen. Niklaus Bernoulli löst das Problem im Briefwechsel unter den allgemeinen Voraussetzungen einer beliebigen vorgegebenen Zahl von Spielern und einer vereinbarten Anzahl von Partien[11]). Er erweist sich auch hier als Meister in der Verallgemeinerung und konsequenten Durchführung komplizierter Summierungen. Es darf hier noch erwähnt werden, daß Jakob Bernoulli den Spezialfall zweier Spieler bereits in seiner

[5]) Chr. Huygens, *De ratiociniis in ludo aleæ*, in Fr. van Schooten, *Exercitationum mathematicarum libri quinque*, p. 534 = *Oeuvres de Huygens* XIV, pp. 90/91.

[6]) *Essay* 1°, p. 184.

[7]) Brief vom 26. 2. 1711, gedruckt in *Essay* 2°, pp. 308–314; die Formel ist auf pp. 309–311 beschrieben.

[8]) Wir verweisen hier auf die folgenden Arbeiten:
- H. Freudenthal und H.-G. Steiner, *Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik*, in *Grundzüge der Mathematik* IV, pp. 149–195.
- K. Kohli, *Spieldauer:* Jakob Bernoullis Lösung der fünften Aufgabe von Huygens bis zu den Arbeiten von de Moivre. In diesem Band.
- I. Schneider, *Der Mathematiker Abraham de Moivre (1667–1754)*. Archive for History of Exact Sciences *5*, 177–317 (1968).

[9]) K. Kohli, *Spieldauer:* Jakob Bernoullis Lösung der fünften Aufgabe von Huygens bis zu den Arbeiten von de Moivre. – I. Schneider, *Der Mathematiker Abraham de Moivre (1667–1754)*. Archive for History of Exact Sciences *5*, 264–265 (1968).

[10]) *Essay* 1°, pp. 30–53 = *Essay* 2°, pp. 105–129.

[11]) Diese Stelle ist gedruckt in *Essay* 2°, pp. 299–301.

*Ars Conjectandi* in einem anderen Zusammenhang behandelt hatte[12]). Im Abschnitt 4 werden wir näher auf das Problem eintreten und vor allem Niklaus Bernoullis allgemeine Lösung darzustellen versuchen.
Im Brief vom 9. 9. 1713 an Montmort hat Niklaus Bernoulli fünf Probleme gestellt; die beiden letzten haben folgenden Wortlaut:

«4.me A promet de donner un ecu à B, si avec un dé ordinaire il amene au premier coup six points, deux écus s'il amene le 6 au second coup, 3 ecus s'il amene ce point au 3.me coup, 4 ecus s'il l'amene au quatriéme et ainsi de suite; on demande quelle est l'esperance de B.
5.me On demande la même chose si A promet à B de luy donner des ecus en cette progression 1, 2, 4, 8, 16, &c. ou 1, 3, 9, 27, &c., ou 1, 4, 9, 16, 25, &c. ou 1, 8, 27, 64, &c., au lieu de 1, 2, 3, 4, 5, &c. comme auparavant.[13]»)

Mit der Formulierung dieser Aufgaben hat Niklaus Bernoulli den Anlaß zum berühmten Petersburger Problem gegeben, über das in der Folgezeit viel diskutiert wurde, das aber erst in jüngster Zeit durch W. Feller mittels moderner Methoden befriedigend gelöst werden konnte[14]). Niklaus Bernoulli bringt im Brief vom 20. 2. 1714 die Schwierigkeit des Problems klar zum Ausdruck[15]); denn daß ein unendlicher Erwartungswert, wie man ihn bei den Beispielen der 5. Aufgabe mit den üblichen Methoden errechnet, nicht sinnvoll ist, leuchtet Niklaus Bernoulli sofort ein. Konsequenterweise beginnt er auch zu zweifeln, ob der endliche Erwartungswert von der Größe 6, den man bei der 4. Aufgabe als Summe einer geometrischen Reihe findet, nicht zu hoch ist. Er schreibt im zitierten Brief:

«De tout ceci, je conclus que la valeur juste d'une certaine esperance n'est pas toujours le milieu qu'on trouve en divisant par la somme de tous les cas possibles la somme des produits de chaque esperance par le nombre des cas qui la donnent; ce qui est contre nôtre regle fondamentale. La raison de ceci est que les cas qui ont une tres petite probabilité doivent étre negligés et censés pour nuls, quoiqu'ils puissent apporter une trés grande esperance. Par cette raison on peut encore douter si la valeur de l'esperance de B dans le cas du 4me Probléme telle que je l'ai trouvée ci dessus, n'est pas trop grande.»

Niklaus Bernoulli fügt hier bei, daß die übliche Bestimmung von Erwartungswerten auch bei Lotterien mit einem oder zwei verhältnismäßig großen Treffern zu unrichtigen Resultaten führe. Er bittet Montmort mehrmals vergeblich um eine Stellungnahme zu diesen Problemen. Montmort scheint überhaupt kein Verständnis dafür zu finden, so daß sich hierüber zwischen den beiden Gelehrten keine Diskussion entwickeln kann.
Im Briefwechsel tritt klar in Erscheinung, daß Niklaus Bernoulli die bahnbrechenden Gedanken von Jakobs *Ars Conjectandi* begriffen hat. Dies kommt besonders in einem Brief zum Ausdruck, in dem er a posteriori eine Wahrscheinlichkeit von 18/35 für die Geburt eines Knaben ermittelt; die statistischen Unterlagen boten ihm die 82 Jahre umfassenden Beobachtungen, die Arbuthnot in einer Abhandlung veröffentlicht hat[16]).

12) Jakob Bernoulli, *Ars Conjectandi*, pp. 182ff.
13) Diese Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, p. 402.
14) W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications* I, pp. 199–201.
15) Dieser Brief ist in *Essay* 2° nicht mehr gedruckt.
16) J. Arbuthnot, *An Argument for Divine Providence, taken from the constant regularity observ'd in the births of both Sexes*. Phil. Transact. *27*, 186–190 (1710). Der im Text erwähnte Brief Niklaus Bernoullis an Montmort datiert vom 23. 1. 1711 und ist gedruckt in *Essay* 2°, pp. 388–394.

Weiterhin berechnet Niklaus Bernoulli mittels der Binomialverteilung, daß eine große Wahrscheinlichkeit dafür besteht, daß diese Anzahlwerte innerhalb der weitesten beobachteten Schranken liegen.

## 2. DAS PHARAO-SPIEL

Dieses Kartenglücksspiel, benannt nach dem früher auf einem der Kartenblätter abgebildeten ägyptischen Pharao, wird in der folgenden Weise gespielt: Der Bankhalter deckt aus einem vollen französischen Kartenspiel (zu 52 Karten) fortwährend zwei Karten auf. Dieses Aufdecken von je zwei Karten wollen wir «Zug» (taille) nennen. Der Spieler (le ponte) besitzt ein sogenanntes «Buch», 13 Kartenblätter (mit den Zahlen 1–10 und den 3 Bildern), die er offen vor sich aufgelegt hat, und kann zu Beginn des Spieles und vor jedem weiteren Zug auf eine oder mehrere dieser Zahlen bzw. Bilder Geld setzen. Wir wollen künftig nur von Zahlen reden, indem wir uns die Bilder durch Zahlen ersetzt vorstellen (das heißt durch 11, 12 und 13). Wenn also der Spieler zu Beginn des Spieles auf eine Zahl setzt, zum Beispiel auf die «8», so sind damit gleich 4 Karten, nämlich die «8» der 4 Farben, besetzt; bei späterem Setzen aber, nachdem schon einige Züge gemacht wurden, kommt es darauf an, wie viele Karten der betreffenden Zahl schon gezogen wurden. Wenn im folgenden von der Anzahl besetzter Karten die Rede ist, so ist damit die Anzahl der noch nicht gezogenen Karten mit der Zahl, auf die der Spieler Geld gesetzt hat, gemeint.
Bezüglich der Gewinnverteilung gelten nun die folgenden Regeln:

1. Stimmt die zuerst aufgedeckte Karte eines Zuges mit einer vom Spieler besetzten Karte überein, so gewinnt die Bank den auf diese Karte gesetzten Betrag.
2. Stimmt die zweite Karte überein, muß die Bank den gesetzten Betrag auszahlen.
3. Erscheint bei einem Zuge beide Male eine besetzte Karte (doublet), so verliert der Spieler die Hälfte des Einsatzes.
4. Beim letzten Zug ist nur die erste Karte maßgebend, was zur Folge hat, daß nur der Bankhalter dabei gewinnen kann.

Würden nur die Regeln 1 und 2 gelten, so wäre der zu erhoffende Gewinn für beide Partner = 0, während die Regeln 3 und 4 eindeutig der Bank einen Vorteil zusichern. Solange nur eine Karte besetzt ist, bleibt Regel 3 wirkungslos. Die Regel 4, die ihren Sinn verliert, wenn mehr als zwei Karten besetzt sind, werden wir erst unten in Formel (2.7) berücksichtigen.
Montmort war der erste, der dieses Spiel wahrscheinlichkeitstheoretisch behandelt hat[17]). Dabei geht er, wie übrigens alle seine Nachfolger, von der Voraussetzung aus, daß auf jede Karte gleichviel gesetzt ist; dieser Einsatz soll «1» betragen. Es werde die Anzahl der noch nicht aufgedeckten Karten mit $p$ und die der besetzten mit $q$ bezeichnet. $s_p(q)$ bedeute die entsprechende Hoffnung (Sort) der Bank und $x_p(q)$ deren Gewinnhoffnung (Avantage). Unter Sort versteht Montmort den bei einem Spieler zu erwartenden Betrag, einschließlich des Einsatzes, den er vor dem Spiel gemacht hat. Wir wählen dafür den Ausdruck Hoffnung. Es ist bei Montmort meist von der Hoff-

[17]) *Essay* 1°, pp. 4–29; *Essay* 2°, pp. 77–104.

nung der Bank die Rede; dabei muß selbstverständlich auch vorausgesetzt werden, daß die Bank einen gleich hohen Einsatz wie der Spieler gemacht hat. Montmort gebraucht noch einen weiteren Begriff, Avantage, den wir mit Gewinnhoffnung wiedergeben. Dieser drückt den um den Spieleinsatz verminderten Betrag der Hoffnung aus. Wir können nun die allgemeine Rekursionsformel nach dem folgenden Schema entwickeln:

| 1. Karte | 2. Karte | Anzahl der Möglichkeiten | Hoffnung der Bank | Gewinnhoffnung der Bank |
|---|---|---|---|---|
| besetzt | besetzt | $q(q-1)\,(p-2)!$ | 3/2 | 1/2 |
| | unbesetzt | $q(p-q)\,(p-2)!$ | 2 | 1 |
| unbesetzt | besetzt | $(p-q)\,q(p-2)!$ | 0 | $-1$ |
| | unbesetzt | $(p-q)\,(p-q-1)\,(p-2)!$ | $s_{p-2}(q)$ | $x_{p-2}(q)$ |

Hieraus gewinnen wir sogleich Montmorts Formel[18]) für die Hoffnung, wenn wir durch $p!$, die Anzahl aller möglichen Fälle, dividieren:

$$s_p(q) = \frac{q(q-1)\cdot\frac{3}{2} + q(p-q)\cdot 2 + (p-q)\,(p-q-1)\,s_{p-2}(q)}{p(p-1)}. \tag{2.1}$$

Montmort beschäftigt sich von jetzt an nur noch mit der Gewinnhoffnung, die in einfacherer Rekursionsformel wiedergegeben werden kann, weil sich nach unserem Schema die zweite und die dritte Zeile bezüglich der Gewinnhoffnung gegenseitig aufheben. Wir erhalten folglich:

$$x_p(q) = \frac{q(q-1)\cdot\frac{1}{2} + (p-q)\,(p-q-1)\,x_{p-2}(q)}{p(p-1)}. \tag{2.2}$$

Dieser plötzliche, unauffällige Übergang von der einen zu der anderen Größe bei Montmort[19]) verleitet Todhunter zur Ansicht, in (2.1) stecke ein Fehler[20]).
Nun ersetzt man sukzessive die $x_{p-2}(q)$, $x_{p-4}(q)$, ..., bis man zu $x_q(q) = 1/2$ für gerade $q$ bzw.

$$x_{q+1}(q) = \frac{q-1}{q+1}\cdot\frac{1}{2}$$

für ungerade $q$ gelangt. Daß $x_q(q) = 1/2$, folgt nach Regel 3, da nämlich beim nächsten Zug beide Karten besetzt sind. Um

$$x_{q+1}(q) = \frac{q-1}{q+1}\cdot\frac{1}{2}$$

zu beweisen, muß beachtet werden, daß die einzige unbesetzte Karte in ebenso vielen Fällen bei der ersten wie bei der zweiten Karte des nächsten Zuges erscheinen kann,

[18]) *Essay* 1°, p. 23 = *Essay* 2°, p. 89.
[19]) *Essay* 1°, p. 23 = *Essay* 2°, pp. 89–90.
[20]) Vgl. Todhunter in seiner *History*, p. 87.

so daß sich die Vorteile nach den Regeln 1 und 2 gegenseitig aufheben. Die Regel 3 wirkt sich dann aus, wenn beide Karten des nächsten Zuges besetzt sind, was mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{q}{q+1} \cdot \frac{q-1}{q} = \frac{q-1}{q+1}$$

möglich ist und den Gewinn 1/2 bringt.
So erhalten wir schließlich aus (2.2)

$$\left.\begin{aligned} x_p(q) = \Big[1 &+ \frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-2)(p-3)} \\ &+ \frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)(p-q-3)}{(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)} + \cdots\Big] \frac{q(q-1)}{p(p-1)} \cdot \frac{1}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

wobei die Summierung so lange fortzusetzen ist, bis die Summanden $= 0$ werden. Das letzte Glied lautet

$$\frac{(p-q)(p-q-1)\ldots 1}{(p-2)(p-3)\ldots(q-1)}$$

für gerade $q$ und

$$\frac{(p-q)(p-q-1)\ldots 2}{(p-2)(p-3)\ldots q}$$

für ungerade $q$. Aus (2.3) folgt durch Erweitern

$$\left.\begin{aligned} x_p(q) = &\frac{(p-2)(p-3)\ldots(p-q+1) + (p-4)(p-5)\ldots(p-q-1) + \cdots}{(p-2)(p-3)\ldots(p-q+1)} \\ &\times \frac{q(q-1)}{p(p-1)} \cdot \frac{1}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

wobei das letzte Glied im Zähler $(q-2)(q-3)\ldots 1$ für gerade $q$ und $(q-1)(q-2)\ldots 2$ für ungerade $q$ lautet. Aus (2.4) finden wir für gerade $q$

$$x_p(q) = \frac{\binom{p-2}{q-2} + \binom{p-4}{q-2} + \cdots + \binom{q-2}{q-2}}{p(p-1)\ldots(p-q+1)} \cdot q! \cdot \frac{1}{2} \tag{2.5}$$

oder in schönerer Gestalt

$$x_p(q) = \frac{\binom{p-2}{q-2} + \binom{p-4}{q-2} + \cdots + \binom{q-2}{q-2}}{\binom{p}{q}} \cdot \frac{1}{2}. \tag{2.6}$$

Für ungerade $q$ muß in den Formeln (2.5) und (2.6) das letzte Glied $\binom{q-1}{q-2}$ heißen. Wenn auch Montmort diese Formeln in beiden Editionen nicht erwähnt, so hat er sie doch herleiten müssen, denn das Rezept zur Berechnung der Gewinnhoffnungen[21]) entspricht genau der Formel (2.5). Im Brief vom 11. 11. 1710 an Johann Bernoulli schreibt Montmort, er kenne (2.3) schon seit langem[22]).

[21]) *Essay* 1°, p. 23 — *Essay* 2°, p. 91.
[22]) Diese Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, p. 304.

Allen bisherigen Formeln ist gemeinsam, daß sie Summen mit einer von $p - q$ abhängenden Anzahl von Summanden enthalten. Den nächsten Schritt zur Vereinfachung sieht Montmort darin, die Summe in Formel (2.5) in eine geschlossene Form zu bringen. Die Summanden bestehen aus figurierten Zahlen ein und derselben Ordnung, wovon jede zweite ausgelassen wird. Wie eine solche Summierung durchgeführt wird, zeigt Montmort ausführlich im *Essay* 2° [23]), während er sich im *Essay* 1° mit der Wiedergabe der daraus resultierenden Formeln für die Fälle $q = 1$ bis $q = 8$ begnügt[24]); darin wird (für $q = 1$ und $q = 2$) die Regel 4 berücksichtigt:

$$\left.\begin{aligned} x_p(1) &= \frac{1}{p} & x_p(5) &= \frac{5(p-2)}{4(p-1)(p-3)} \\ x_p(2) &= \frac{p+2}{2p(p-1)} & x_p(6) &= \frac{3(2p^2-13p+16)}{4(p-1)(p-3)(p-5)} \\ x_p(3) &= \frac{3}{4(p-1)} & x_p(7) &= \frac{7(2p^2-12p+13)}{8(p-1)(p-3)(p-5)} \\ x_p(4) &= \frac{2p-5}{2(p-1)(p-3)} & x_p(8) &= \frac{4p^3-50p^2+176p-151}{2(p-1)(p-3)(p-5)(p-7)}. \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Daß man auch im Pharao-Spiel die Kombinatorik anwenden kann, zeigt Johann Bernoulli im Brief vom 17. 3. 1710 an Montmort. Er zeigt es aber nur an Einzelbeispielen[25]); sein Kunstgriff besteht darin, alle unbesetzten Karten mit dem gleichen Buchstaben $a$ und die besetzten mit $b$ zu bezeichnen. Ist zum Beispiel $p = 6$ und $q = 2$, so können die 6 noch zu ziehenden Karten in der Reihenfolge der Ziehung als Permutationen der Elemente $a\ a\ a\ a\ b\ b$ dargestellt werden, wobei $\binom{6}{2}$ gleich wahrscheinliche Fälle zu unterscheiden sind.

An dieses Beispiel fügt Johann Bernoulli die Bemerkung an, man könne auch im allgemeinen Falle analog vorgehen. Dann gibt er sogleich, ohne Herleitung, für gerade und ungerade $q$ je zwei Formeln an, von denen jeweils die erste in moderner Notation wie folgt lautet:

$$x_p(q) = \frac{1 + \binom{q}{2} + \binom{q+2}{4} + \cdots + \binom{p-2}{p-q}}{\binom{p}{q}} \cdot \frac{1}{2} \tag{2.8}$$

für gerade $q$ und

$$x_p(q) = \frac{\binom{q-1}{1} + \binom{q+1}{3} + \cdots + \binom{p-2}{p-q}}{\binom{p}{q}} \cdot \frac{1}{2} \tag{2.9}$$

für ungerade $q$. Eine Herleitung der beiden Formeln findet man bei Struyck[26]).

[23]) *Essay* 2°, pp. 94–97.
[24]) *Essay* 1°, pp. 24/25 = *Essay* 2°, p. 97.
[25]) Diese Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, pp. 284–286, und in den *Opera* Johannis Bernoulli I, pp. 454–456.
[26]) N. Struyck, *Uytreekening der kanssen in het speelen*, p. 101 = *Oeuvres*, pp. 106/107.

In den folgenden Jahrzehnten wurde das Pharao-Spiel von den meisten Wahrscheinlichkeitstheoretikern einer Untersuchung unterzogen. Die kurze und schöne Darstellung von Nicolaas Struyck (1716)[27]) geht nicht über die Forschungen von Montmort, Johann und Niklaus Bernoulli hinaus, hingegen hat schon 1718 de Moivre durch eine neue Problemstellung interessante Aspekte dieses Spieles aufgezeigt. Nachdem er für $q = 1, 2, 3, 4$ die Formeln (2.7) einzeln hergeleitet hat[28]), bringt er die folgende neuartige Erweiterung des Problems[29]): Er setzt voraus, daß der Spieler am Anfang und nach jedem Zug blindlings auf eine Karte setzen soll, letztmals vor dem $m$-ten Zuge. Die Wahl der jeweils zu besetzenden Karten muß zufällig und unabhängig von den vorhergehenden Ergebnissen sein. Hieraus folgt, daß $q$ nicht mehr eine vorgegebene Größe ist, sondern eine Zufallsvariable ($q = 0, 1, 2, 3, 4$). In moderner Schreibweise können wir das Problem wie folgt formulieren: $w_j(q)$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit, daß beim Setzen nach dem $j$-ten Zuge $q$ Karten besetzt werden ($j = 0, 1, \ldots, m-1$). Das volle Kartenspiel enthalte $n$ Karten; es werde jedesmal eine Geldeinheit gesetzt. Dann ist die gesamte Gewinnhoffnung $H$ der Bank durch folgende Doppelsumme darstellbar

$$H = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{4} w_j(q)\, x_{n-2j}(q) \,.$$

Mit

$$w_j(q) = \frac{\binom{n-2j}{q}\binom{2j}{4-q}}{\binom{n}{4}}$$

und den Formeln (2.7) findet de Moivre

$$H = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{n^3 - \frac{9}{2}n^2 + 5n - 6j - 6j^2 + 24j^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$= \frac{m n^3 - \frac{9}{2} m n^2 + 5 m n + 6 m^4 - 14 m^3 + 6 m^2 + 2 m}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \,.$$

Für $n = 52$ und $m = 23$, das heißt, wenn der Spieler vor dem viertletzten Zuge zu setzen aufhört, wird $H = 0{,}688$ Geldeinheiten.

1724 hat sich Daniel Bernoulli mit dem Pharao-Spiel auseinandergesetzt[30]), ohne jedoch über die Forschungen seiner Vorgänger hinauszugehen.

Als nächste bedeutende Arbeit über dieses Spiel kann erst die 1764 erschienene Abhandlung[31]) von Euler angesehen werden. Euler berechnet den Vorteil des Bankhalters

[27]) N. Struyck, *Uytreekening der kanssen in het speelen*, pp. 99–101 = *Oeuvres*, pp. 104–107.
[28]) A. de Moivre, *The doctrine of chances*, pp. 40–44.
[29]) A. de Moivre, *The doctrine of chances*, pp. 55–58.
[30]) Daniel Bernoulli, *Exercitationes mathematicæ*, pp. 3–29.
[31]) L. Euler, *Sur l'avantage du banquier au jeu de Pharaon*. Mém. Acad. Berlin *1764*, 144–164 = *Opera* I.7, pp. 57–78.

unter den gleichen Voraussetzungen wie Montmort. Durch Partialbruchzerlegung der Formeln (2.7) und unter Verzicht auf Regel 4 findet er folgende Gesetzmässigkeiten:

$$x_p(1) = 0 \qquad x_p(5) = \frac{1}{16}\left(\frac{10}{p-1} + \frac{10}{p-3}\right)$$

$$x_p(2) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{p-1} \qquad x_p(6) = \frac{1}{32}\left(\frac{15}{p-1} + \frac{30}{p-3} + \frac{3}{p-5}\right)$$

$$x_p(3) = \frac{1}{4}\,\frac{3}{p-1} \qquad x_p(7) = \frac{1}{64}\left(\frac{21}{p-1} + \frac{70}{p-3} + \frac{21}{p-5}\right)$$

$$x_p(4) = \frac{1}{8}\left(\frac{6}{p-1} + \frac{2}{p-3}\right) \qquad x_p(8) = \frac{1}{128}\left(\frac{28}{p-1} + \frac{140}{p-3} + \frac{84}{p-5} + \frac{4}{p-7}\right).$$

Ohne Beweis leitet er davon die folgende Formel ab

$$x_p(q) = \frac{1}{2^{q-1}}\left(\binom{q}{2}\frac{1}{p-1} + 2\binom{q}{4}\frac{1}{p-3} + 3\binom{q}{6}\frac{1}{p-5} + \cdots\right)$$

oder

$$x_p(q) = \frac{q}{2^q}\left(\binom{q-1}{1}\frac{1}{p-1} + \binom{q-1}{3}\frac{1}{p-3} + \binom{q-1}{5}\frac{1}{p-5} + \cdots\right),$$

wobei die Anzahl der Glieder $= q/2$ für gerade $q$ und $(q-1)/2$ für ungerade $q$ ist. Euler fügt dieser Formel noch folgende äquivalente Darstellung bei:

$$x_p(q) = \frac{q}{2^{q+1}}\left[\int_0^1 z^{p-1}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{q-1} dz - \int_0^1 z^{p-1}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{q-1} dz\right].$$

## 3. DAS PROBLÈME DES PARTIS

Dem Problème des partis kann irgendein Spiel, das aus mehreren Partien besteht, zugrunde liegen. Wir nehmen an, zwei Spieler $A$ und $B$ hätten vereinbart, so viele Partien miteinander zu spielen, bis einer von beiden zuerst eine vorgegebene Anzahl von Partien gewonnen hat und dadurch Sieger im Spiel wird. Die Chancen des $A$ und des $B$, in einer Partie zu gewinnen, sollen sich wie $a:b$ verhalten. Das Problem besteht nun darin, in einem beliebigen «Zustand», das heißt nachdem $A$ und $B$ je eine beliebige Anzahl Partien schon gewonnen haben, zu bestimmen, wie sich ihre Chancen auf Spielgewinn verhalten. In der Spielpraxis kann diese Fragestellung dann eine Rolle spielen, wenn sich die Spieler zu vorzeitigem Spielabbruch entschließen. Nach welchem Schlüssel müssen die Einsätze verteilt werden, wenn dem $A$ noch $m$ und dem $B$ noch $n$ Partien fehlen? Dies ist die Fragestellung an Pascal von seiten des Chevalier de Méré, der das Problem für einen speziellen Fall und für $a = b$ formuliert hat. In dem berühmten Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat im Jahre 1654 finden wir bereits richtige Lösungen[32]). Es darf festgehalten werden, daß die beiden grossen

[32]) Siehe Fußnote 1 am Anfang des zweiten Teils.

Mathematiker unabhängig voneinander auf verschiedenem Wege zu den gleichen Resultaten gelangt sind.

Um Pascals Methode allgemein darzustellen, formulieren wir den «Zustand» $(x, y)$, wobei $x$ und $y$ die Anzahl der fehlenden Punkte des $A$ bzw. des $B$ bezeichnen. Nach der nächsten Partie wird der Zustand $(x - 1, y)$ oder der Zustand $(x, y - 1)$ erreicht. Das Spiel ist erst dann beendet, wenn die eine Koordinate 0 wird. Pascal berechnet nun die Gewinnwahrscheinlichkeit eines der Spieler beim Zustand $(m, n)$ rekursiv, indem er sie auf die Gewinnwahrscheinlichkeiten bei den Zuständen $(m - 1, n)$ bzw. $(m, n - 1)$ zurückführt. Dieser Prozeß wird fortgesetzt, bis man zu einem Endzustand gelangt. Fermats Lösungsmethode bedient sich der Kombinatorik; dazu ist folgende Überlegung wichtig: Das Spiel wird in höchstens $m + n - 1$ Partien entschieden sein. Bezeichnen wir die künftigen Partien, in denen $A$ bzw. $B$ gewinnen wird, mit $\alpha$ bzw. $\beta$, so kann die Gesamtheit der Spielergebnisse durch alle möglichen Anordnungen von $m + n - 1$ Elementen, die nur aus $\alpha$ und $\beta$ bestehen, dargestellt werden, wobei die Anzahl der $\alpha$ wie auch der $\beta$ die Werte von 0 bis $m + n - 1$ durchlaufen kann. Fehlt zum Beispiel dem $A$ noch 1 Punkt, während dem $B$ noch 3 Punkte fehlen, so sind die möglichen Spielausgänge $\alpha\,\alpha\,\alpha$, $\alpha\,\alpha\,\beta$, $\alpha\,\beta\,\alpha$, $\beta\,\alpha\,\alpha$, $\alpha\,\beta\,\beta$, $\beta\,\alpha\,\beta$, $\beta\,\beta\,\alpha$, $\beta\,\beta\,\beta$. In diesem Beispiel ist zu beachten, daß außer den beiden letzten Fällen das Spiel schon vor der dritten Partie beendet ist. Fermat hat aber deutlich erkannt, daß bei einem vor $m + n - 1$ Partien entschiedenen Spiele noch alle möglichen Spielfortsetzungen zu berücksichtigen sind. Durch diese rein gedankliche Unterscheidung erhält er – modern ausgedrückt – eine Menge von Elementarereignissen, die alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $1/2^{m+n-1}$ eintreten. Die dem $A$ günstigen Fälle werden durch jene Permutationen dargestellt, bei denen das Element $\alpha$ mindestens $m$-mal vorkommt.

Setzt man abkürzend $m + n - 1 = r$, so folgt für die Wahrscheinlichkeit $w_A$ und $w_B$, daß $A$ bzw. $B$ das Spiel gewinnt:

$$w_A = \frac{1}{2^r} \sum_{k=m}^{r} \binom{r}{k} \qquad w_B = \frac{1}{2^r} \sum_{k=n}^{r} \binom{r}{k} \tag{2.10}$$

oder wegen $\binom{r}{k} = \binom{r}{r-k}$

$$w_A = \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r}{k} \qquad w_B = \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{r}{k} \; . \tag{2.11}$$

Daß $w_A + w_B = 1$, ersieht man leicht durch Addition von $w_A$ aus (2.10) und $w_B$ aus (2.11) oder umgekehrt.

Im allgemeinen Fall, in dem sich die Wahrscheinlichkeiten der beiden Spieler $A$ und $B$, in einer einzelnen Partie zu gewinnen, wie $a:b$ verhalten, erweitert sich (2.11) zu

$$w_A = \frac{1}{(a+b)^r} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r}{k} a^{r-k}\, b^k \qquad w_B = \frac{1}{(a+b)^r} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{r}{k} a^k\, b^{r-k} \; . \tag{2.12}$$

In dieser Allgemeinheit taucht das Problème des partis erstmals bei Johann Bernoulli im Brief vom 17. 3. 1710 an Montmort auf. Darin schreibt er eine Formel[33]),

[33]) Diese Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, p. 295, und in den *Opera* Johannis Bernoulli I, p. 465.

die in unserer Bezeichnungsweise wie folgt lautet:

$$w_A : w_B = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r}{k} a^{r-k} b^k : \sum_{k=0}^{m-1} \binom{r}{k} a^k b^{r-k} . \tag{2.13}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit (2.12) überein.
Im *Essay* 2° zeigt Montmort eine neue Methode zur Lösung dieses klassischen Problems[34]). Er hat sie erstmals im Brief vom 1. 3. 1712 an Niklaus Bernoulli mitgeteilt und expliziert[35]). Das Prinzip seiner Lösung besteht darin, die Spielausgänge, die dem $A$ den Gewinn des Spieles ermöglichen, in folgende $n$ Fälle zu gliedern:

1. Fall: $A$ gewinnt nach genau $m$ Partien.
2. Fall: $A$ gewinnt nach genau $m + 1$ Partien.
⋮ ⋮
$n$-ter Fall: $A$ gewinnt nach genau $m + n - 1$ Partien.

Zum 1. Fall gehört nur ein mögliches Ereignis; es kann mit der Wahrscheinlichkeit $a^m/(a + b)^m$ eintreten. Es gilt allgemein für den $k$-ten Fall ($k = 1, 2, \ldots, n$), daß $A$ $m$ Punkte und $B$ $k - 1$ Punkte gewonnen hat, wobei die letzte dieser $m + k - 1$ Partien nur von $A$ gewonnen werden darf. Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, die zum $k$-ten Fall gehören, ergibt sich somit zu $\binom{m + k - 2}{k - 1}$, und jede dieser Möglichkeiten tritt mit der Wahrscheinlichkeit $a^m b^{k-1}/(a + b)^{m+k-1}$ auf. Hieraus folgt durch Summierung

$$\left.\begin{aligned} w_A = \frac{a^m}{(a+b)^m} + \binom{m}{1} \frac{a^m b}{(a+b)^{m+1}} + \binom{m+1}{2} \frac{a^m b^2}{(a+b)^{m+2}} \\ + \cdots + \binom{m+n-2}{n-1} \frac{a^m b^{n-1}}{(a+b)^{m+n-1}} . \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

In analoger Weise wird $w_B$ hergeleitet.
Weiter in der Verallgemeinerung geht Niklaus Bernoulli in seinem Brief vom 2. 6. 1712 an Montmort[36]). Er setzt voraus, daß sich die Wahrscheinlichkeiten der beiden Spieler $A$ und $B$, eine einzelne Partie zu gewinnen, in der 1., 3., 5., ... Partie wie $a:b$, in der 2., 4., 6., ... Partie wie $c:d$ verhalten. Er stellt eine Formel auf, die wir in moderner Form und nur für gerade $r = m + n - 1$ wiedergeben wollen ($m > n$):

$$\begin{aligned} w_A = \frac{1}{(a+b)^{r/2}(c+d)^{r/2}} \Bigg[ c^{r/2} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r/2}{k} a^{r/2-k} b^k + \binom{r/2}{1} c^{r/2-1} d \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r/2}{k-1} a^{r/2-k+1} b^{k-1} \\ + \binom{r/2}{2} c^{r/2-2} d^2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r/2}{k-2} a^{r/2-k+2} b^{k-2} + \cdots + \binom{r/2}{n-1} c^{r/2-n+1} d^{n-1} a^{r/2} \Bigg] \\ = \frac{1}{(a+b)^{r/2}(c+d)^{r/2}} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r/2}{j} c^{r/2-j} d^j \binom{r/2}{k-j} a^{r/2-k+j} b^{k-j} . \end{aligned} \tag{2.15}$$

[34]) *Essay* 2°, pp. 244/245.
[35]) Diese Briefstelle ist in *Essay* 2° nicht gedruckt.
[36]) Diese Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, pp. 349/350.

Diese Formel kann am einfachsten durch Ausweitung von (2.12) hergeleitet werden. Im Brief vom 10. 11. 1711 an Montmort[37]) greift Niklaus Bernoulli das Jeu de paume auf, das Jakob Bernoulli in einem Brief an einen Freund umfassend behandelt hat[38]). Niklaus Bernoulli konnte Einsicht in das damals noch unveröffentlichte Manuskript nehmen. Er stellt nun im soeben zitierten Brief einige Einzelprobleme an Montmort, um die Resultate zu überprüfen. Das Jeu de paume ist ein dem heutigen Tennis-Spiel verwandtes Spiel und bietet ein schönes Beispiel für das Problème des partis. Das Spiel besteht aus mehreren Partien (auch Spielgänge genannt); das Verhältnis $a:b$ der Chancen der beiden Spieler $A$ und $B$, eine einzelne Partie zu gewinnen, richtet sich nach deren Fertigkeit im Ballspiel; ein Einzelspiel endigt, sobald ein Spieler die verlangte Anzahl Partien gewonnen hat. Jakob Bernoulli hatte eine interessante Frage aufgeworfen, die er jeweils bei Einzelbeispielen beantwortete: Es sei $a > b$ vorausgesetzt; nun wird gefragt, wie viele Punkte $A$ dem $B$ zu Beginn des Spieles geben soll, damit beide die gleichen Chancen haben, das Spiel zu gewinnen. Im Beispiel $a = 2\,b$ und einer vereinbarten Punktezahl von $m = 2$ wäre $A$ bereits im Nachteil, wenn er dem $B$ am Anfang einen Punkt schenkt, dem $B$ also nur noch ein Punkt fehlt, während dem $A$ zwei Punkte fehlen, das heißt $m = 2$ und $n = 1$. Aus (2.14) folgt $w_A = 4/9$, hingegen im Normalfall ($n = 2$; $m = 2$) ist $A$ mit $w_A = 20/27$ im Vorteil. Da 4/9 näher bei 1/2 liegt als 20/27, ist nach Jakob Bernoulli der erstere Fall ($m = 2$; $n = 1$) vorzuziehen. Im Brief vom 1. 3. 1712 geht Montmort auf solche Probleme näher ein[39]) und zeigt, daß im erwähnten Beispiel $A$ dem $B$ 13/16 Punkte schenken müßte, damit $w_A = w_B = 1/2$. Dies sei wie folgt aufzufassen: Um zu entscheiden, ob $A$ den Punkt schenken soll, läßt er jemanden aus einer mit 13 weißen und 3 schwarzen Spielmarken (Jettons) gefüllten Urne (Bourse) eine Marke ziehen. Wird eine weiße Marke gezogen, muß er den Punkt schenken, andernfalls nicht. Diesen Gedanken mit der Hilfsurne werden wir bei Montmort in einem anderen Zusammenhang, wo er sich besonders nützlich erweisen wird, antreffen[40]).

## 4. DAS PROBLEM DES ROLLENWECHSELS IM JEU DU LANSQUENET

Das Kartenglücksspiel Jeu du Lansquenet, benannt nach den Landsknechten unter Heinrich IV., kam Ende des 16. Jahrhunderts in Frankreich auf und wurde in der Armee und am Hofe Ludwigs XIII. viel gespielt, bis es infolge Mißbrauchs verboten werden mußte. Um in Kürze den Spielablauf zu skizzieren, sei vorausgesetzt, daß $n$ Personen miteinander spielen. Sie losen zuerst aus, wer von ihnen das Amt des Bankhalters ausüben darf und welche Plätze die übrigen $n - 1$ Spieler einzunehmen haben. Nachdem jeder Spieler einen Betrag $A$ gesetzt hat, macht der Bankhalter einen Geldeinsatz von $(n - 1)\,A$. Darauf gibt er blindlings von einem vollen Kartenspiel (zu

[37]) Diese Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, pp. 333/334.
[38]) Jakob Bernoulli, *Lettre à un amy, sur les parties du jeu de paume.*
[39]) Diese Briefstelle ist in *Essay* 2° nicht gedruckt.
[40]) Siehe Dritter Teil.

52 Karten) allen mit ihm um einen runden Tisch sitzenden Spielern eine Karte, zuletzt sich selber; die übrigen Karten deckt er anschließend einzeln auf. Sobald eine Karte erscheint, die mit der eines Spielers wertmäßig übereinstimmt, verfällt dessen Einsatz dem Bankhalter; dieser spielt mit den übrigen Spielern weiter, bis entweder alle Spieler ihre Einsätze verloren haben oder aber eine aufgedeckte Karte mit der des Bankhalters übereinstimmt und dieser dadurch seinen ganzen Einsatz an die Spieler verliert.

Nach den geschilderten Spielbedingungen hätten alle Spieler die Gewinnhoffnung Null. Es herrschen aber noch zahlreiche Einzelregeln in bezug auf die Kartenverteilung am Anfang des Spieles, doch lohnt es sich nicht, darauf einzugehen, da diese Regeln keine mathematisch saubere Lösung ermöglichen.

Montmort hat in seinem *Essay* mit großem Rechenaufwand numerische Lösungen für Spezialfälle ermittelt[41]). Er beginnt mit der Berechnung bei 3 Personen und fährt fort bis zu 7 Personen, ohne jedoch eine allgemeine Formel zu finden. Aus den mühsamen und umfangreichen Rechnungen muß man schließen, daß Montmort großes Interesse an den Ergebnissen der Einzelfälle hatte.

Während die einzelne Partie mathematisch völlig uninteressant ist, weist dieses Spiel einen anderen interessanten Aspekt auf. Es gibt nämlich Regeln, die festsetzen, ob der Bankhalter, der nach den Spielregeln im Vorteil ist, nach einer Partie sein Amt beibehalten darf. Wir setzen voraus, die Wahrscheinlichkeit dafür sei in einem vorgegebenen Fall gleich $p$. Der in einer Partie zu erwartende Gewinn des Bankhalters werde mit $a$ bezeichnet. (Es ist zu beachten, daß der Bankhalter in einer Partie einen Betrag gewinnen kann, sein Amt jedoch nicht beibehalten darf.)

Montmort geht von der unrealistischen Voraussetzung aus, daß der Bankhalter nur so lange spiele, als er sein Amt behalten darf, sich andernfalls aber vom Spiel zurückziehe. Unter diesen Annahmen ist die gesamte Gewinnhoffnung des Bankhalters[42]), die wir mit $x$ bezeichnen, als unendliche geometrische Reihe darstellbar. Sie lautet, wenn der Spieleinsatz $A = 1$ gesetzt wird:

$$x = a + p\,a + p^2\,a + p^3\,a + \cdots = \frac{a}{1 - p}\,. \tag{2.16}$$

Montmort benützt die Reihe (2.16) bei all seinen Einzelberechnungen. Im Falle von 3 Spielern zum Beispiel (Bankhalter und 2 Mitspieler), in dem er $a = 3/17$ und $p = 2351/6375$ errechnet hat, gelangt er zum Schlußergebnis $x = 19125/68408$, was unmittelbar aus (2.16) folgt[43]).

Im Brief vom 17. 3. 1710 an Montmort behandelt Johann Bernoulli den Spezialfall zweier Spieler (Bankhalter und Mitspieler)[44]), erweitert aber die Voraussetzungen in dem Sinne, daß der Bankhalter das Spiel nicht verläßt, wenn er sein Amt verliert, sondern die Rolle mit dem Mitspieler vertauscht, bis dieser sein Amt verliert und die

41) *Essay* 1°, pp. 30–53 = *Essay* 2°, pp. 105–129.
42) Zur Definition der Gewinnhoffnung siehe Abschnitt 2.
43) *Essay* 1°, p. 35 = *Essay* 2°, p. 110.
44) Diese Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, pp. 287–289, und in den *Opera* Johannis Bernoulli I, pp. 457–459.

Rollen von neuem vertauscht werden usw. Es bedeute $p$ die Wahrscheinlichkeit, daß der Bankhalter sein Amt behält; Rollenvertauschung tritt dann mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ auf. Johann Bernoullis rekursive Berechnung kann in folgender einfacher Form dargestellt werden:

$$x = a + p\,x + (1 - p)\,(-x)\,. \tag{2.17}$$

Der erste Summand drückt die Gewinnhoffnung des Bankhalters in der ersten Partie aus, der zweite und dritte Summand dessen weitere gesamte Gewinnhoffnung, wenn er sein Amt behält bzw. verliert. Die Auflösung der Gleichung ergibt

$$x = \frac{a}{2(1 - p)}\,. \tag{2.18}$$

Die Erweiterung von Montmorts Voraussetzungen haben den Wert $x$ bei 2 Spielern auf die Hälfte reduziert.

In den lateinischen Bemerkungen, die Niklaus Bernoulli dem vorerwähnten Brief Johanns beigelegt hatte, finden wir die Verallgemeinerung dieses Problems auf $n$ Spieler $A_1, A_2, \ldots, A_n$, die um einen runden Tisch sitzen. Zu Beginn des Spieles soll $A_1$ das Amt des Bankhalters ausüben; $A_2$ sitzt zur Linken von $A_1$, $A_3$ zur Linken von $A_2$ usw. bis sich bei $A_n$, der den Platz zur Rechten des Bankhalters hat, der Kreis schließt. Bei der ersten Partie besteht für $A_i$ die Aussicht auf den Gewinn $a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, wobei $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$. Die aus den Spielregeln zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit, daß die Spieler nach einer Partie ihre spezifische Rolle in der nächsten Partie beibehalten, werde mit $p$ bezeichnet. In den übrigen Fällen, für die die Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ besteht, wechseln alle Spieler ihre Rolle; der Spieler $A_i$ übernimmt die Rolle, die vorher der Spieler $A_{i+1}$ innehatte $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$; der Spieler $A_n$ übernimmt die vorherige Rolle von $A_1$. Der zu erwartende Gewinn des Spielers $A_i$ in einem aus unendlich vielen Partien bestehenden Spiele werde mit $x_i$ bezeichnet. In analoger Weise wie in Johann Bernoullis Spezialfall $n = 2$ können die $x_i$ rekursiv ermittelt werden:

$$x_i = a_i + p\,x_i + q\,x_{i+1} \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{2.19}$$

Für $i = n$ ist darin $x_{i+1}$ durch $x_1$ zu ersetzen. Zur Auflösung der unbekannten $x_i$ gebrauchen wir aus dem Gleichungssystem (2.19) die ersten $n - 1$ Gleichungen, die wir auf die Form

$$x_i - x_{i+1} = \frac{a_i}{q} \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1 \tag{2.20}$$

bringen, sowie die Beziehung $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Mit dieser Beziehung und dem durch $n - i$

erweiterten Gleichungssystem (2.20) erhalten wir das folgende Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
(n-1)\,(x_1 - x_2) &= (n-1)\,\frac{a_1}{q}\,,\\
(n-2)\,(x_2 - x_3) &= (n-2)\,\frac{a_2}{q}\,,\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
2(x_{n-2} - x_{n-1}) &= 2\cdot\ \frac{a_{n-2}}{q}\,,\\
x_{n-1} - x_n &= \frac{a_{n-1}}{q}\,,\\
\sum_{i=1}^{n} x_i &= 0\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.21)$$

Durch Summierung auf beiden Seiten resultiert schließlich

$$x_1 = \frac{1}{n\,q}\big((n-1)\,a_1 + (n-2)\,a_2 + \cdots + a_{n-1}\big).$$

Aus Symmetriegründen muß allgemein gelten:

$$x_i = \frac{1}{n\,q}\big((n-1)\,a_i + (n-2)\,a_{i+1} + \cdots + a_{i-2}\big), \qquad (2.22)$$

wobei zu beachten ist, daß die Indizes von $i$ bis $n$ und hernach von 1 an laufen. Diese Formel (2.22) steht ohne Beweis bei Niklaus Bernoulli[45]). Für $n = 2$ geht (2.22) über in $x_i = a_i/2\,q$ $(i = 1, 2)$, stimmt also mit dem Ergebnis (2.18) von Johann Bernoulli überein.

Niklaus Bernoulli geht noch einen Schritt weiter in der Verallgemeinerung. Im Vorangegangenen wurde vorausgesetzt, daß sich ein Spiel aus unendlich vielen Partien zusammensetze. Viel schwieriger gestaltet sich die Rechnung, wenn zwischen den Spielern eine endliche Anzahl von Partien, die wir mit $l$ bezeichnen, zu Beginn des Spieles vereinbart wird. Die oben benutzte rekursive Methode versagt in diesem Falle. Niklaus Bernoulli macht den Ansatz in Form einer endlichen Reihe, die die folgende Gestalt aufweist[46]):

$$\left.\begin{aligned}
x_i = a_i &+ (p\,a_i + q\,a_{i+1}) + (p^2\,a_i + 2\,p\,q\,a_{i+1} + q^2\,a_{i+2})\\
&+ (p^3\,a_i + 3\,p^2\,q\,a_{i+1} + 3\,p\,q^2\,a_{i+2} + q^3\,a_{i+3})\\
&+ \cdots + \sum_{j=0}^{l-1} \binom{l-1}{j} p^{l-j-1} q^j\,a_{i+j}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.23)$$

Dabei ist zu beachten, daß $a_i = a_{i+n} = a_{i+2n} = \cdots$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Im Spezialfall zweier Spieler $(n = 2)$ kann (2.23) in eine geometrische Reihe umgeformt werden. Da

45) Die Formel ist gedruckt in *Essay* 2°, p. 301.
46) Die Formel ist gedruckt in *Essay* 2°, p. 300.

nämlich in diesem Falle

$$a_{i+j} = \begin{cases} a_i, j \text{ gerade} \\ -a_i, j \text{ ungerade} \end{cases}$$

gilt, erhalten wir

$$x_i = a_i + (p\,a_i - q\,a_i) + (p^2 a_i - 2\,p\,q\,a_i + q^2 a_i) + \cdots + \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j \binom{l-1}{j} p^{l-j-1} q^j a_i ,$$

woraus

$$x_i = \sum_{k=0}^{l-1} (p-q)^k a_i \tag{2.24}$$

folgt. Diesen Spezialfall hat schon Jakob Bernoulli in seiner *Ars Conjectandi* behandelt und seine Lösung, die mit (2.24) übereinstimmt, im «Bockspiel» angewendet[47]). Anschließend an (2.23) stellt Niklaus Bernoulli die $x_i$ als Linearkombination der $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_{i+l-1}$ dar, wobei wieder $a_i = a_{i+n} = a_{i+2n} = \cdots$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gilt. In moderner Form lautet sein Ergebnis, das er ohne Beweis angibt, wie folgt[48]):

$$x_i = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{q} \left[1 - p^l \left(1 + \frac{q}{p}\binom{l}{1} + \frac{q^2}{p^2}\binom{l}{2} + \frac{q^3}{p^3}\binom{l}{3} + \cdots + \frac{q^k}{p^k}\binom{l}{k}\right)\right] a_{i+k} . \tag{2.25}$$

Es ist denkbar, daß Niklaus Bernoulli die Umformung nach der eleganten Methode, wie sie sich bei Todhunter in seiner *History* findet[49]), vorgenommen hat. Sie besteht darin, daß

$$\sum_{j=0}^{l-k-1} \binom{k+j}{k} p^j = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dp^k} \left(\sum_{v=0}^{l-1} p^v\right) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dp^k} \left(\frac{1-p^l}{1-p}\right)$$

gesetzt und nach der Quotientenregel $k$-mal differenziert wird.

[47]) Jakob Bernoulli, *Ars Conjectandi*, pp. 182–191.
[48]) Die Formel ist gedruckt in *Essay* 2°, p. 300.
[49]) Siehe pp. 118/119.

Dritter Teil

# Strategische Spiele

Den weit umfangreichsten Teil im Briefwechsel zwischen Montmort und Niklaus Bernoulli nimmt die Diskussion um das Spiel Le Her ein. Daß dieses Problem die beiden Gelehrten vier Jahre lang (1711–1715) in nicht weniger als 16 Briefen beschäftigen konnte, wird aus der Natur dieses Problems verständlich. Mit Le Her tritt neben dem Zufall noch das unbekannte Verhalten (Strategie) der Spieler in Erscheinung. Es ist erstaunlich, daß solche mit bloßer Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht zu bewältigende Probleme nie mehr aufgegriffen wurden, bis 1928 J. von Neumann mit einer Abhandlung den Grundstein zu einem neuen Wissenschaftszweig, der Spieltheorie, legte[1]).
In der Kontroverse zwischen Montmort und Niklaus Bernoulli begegnen wir zwei weiteren Persönlichkeiten, die mit Montmort befreundet waren: dem Abbé d'Orbais, dessen Abtei in der Nähe von Montmort lag, und Waldegrave, der aus einer englischen Adelsfamilie stammte und wahrscheinlich in Paris wohnte[2]). Von den beiden Freunden berichtet Montmort:

«Ils ne sont l'un et l'autre ni grands Geometres ni excellents Analystes, mais ils ont une teinture raisonable de ces sciences et ce qui vaut encore mieux, ils ont l'un et l'autre infiniment de l'esprit.[3]»)

Ihre Auffassungen im Disput um das Spiel Le Her sind jeweils von Montmort an Niklaus Bernoulli berichtet worden; es existiert jedoch das Manuskript eines Briefes vom 9. 1. 1715, den Waldegrave direkt an Niklaus Bernoulli gerichtet hat, und eines Antwortbriefes Bernoullis an Waldegrave vom 31. 3. 1715.
Zum erstenmal taucht das Problem im Anhang von Montmorts *Essay* 1° als zweites der dem Löser zur Lösung gestellten Probleme auf[4]). Im folgenden sollen die Spielregeln nur für den Spezialfall von zwei Spielern erläutert werden, da im Briefwechsel einzig auf diesen Fall Bezug genommen wird. Die beiden Spieler seien Pierre und Paul genannt. Pierre besitzt ein volles französisches Kartenspiel (zu 52 Karten) und gibt Paul und sich selber irgendeine Karte. Paul hat nun das Recht, falls er mit seiner Karte nicht zufrieden ist, sie mit derjenigen Pierres zu tauschen, außer wenn Pierre einen König hat. Nachdem sich Paul für Tausch oder Nicht-Tausch entschieden hat, liegt nun an Pierre die Wahl, seine Karte, die er sich entweder selber am Anfang gegeben oder die er infolge Tauschens von Paul erhalten hat, zu behalten oder eine neue Karte aus dem Kartenspiel zu ziehen, die aber kein König sein darf, ansonsten Pierre sich wieder an die ursprüngliche Karte zu halten hat. Darauf decken beide Spieler ihre Karte auf. Wer die höhere Karte besitzt, hat die Partie gewonnen; sind beide Karten gleich, gewinnt Pierre.

1) J. von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*. Mathematische Annalen *100*, 295–320 (1928).
2) Sein Bruder Henry Waldegrave (1660–1689) hatte Henrietta, die Tochter des Königs Jakob II. von England, geheiratet und war zur Zeit der Revolution Botschafter in Frankreich. Er ist der Vater des berühmteren James Waldegrave (1684–1741), der als Botschafter in Wien und später in Paris wirkte.
3) Dieser Satz ist in *Essay* 2° nicht gedruckt.
4) *Essay* 1°, pp. 185–187 = *Essay* 2°, pp. 278–279.

Montmort und Niklaus Bernoulli waren sich von Anfang an darüber einig, daß Paul seine Karte behalten soll, wenn sie höher als 7, und sie tauschen, wenn sie niedriger als 7 ist. Pierre soll die Karte immer behalten, wenn sie höher als 8, und tauschen, wenn sie niedriger als 8 ist. Die Schwierigkeit besteht einzig dann, wenn Paul eine 7 oder Pierre eine 8 hat. In diesem Fall hängt nämlich der Vorteil des Tauschens oder Nicht-Tauschens davon ab, ob der Gegner tauscht oder nicht tauscht. Dies ersieht man deutlich aus der folgenden tabellarischen Zusammenstellung, die Montmort als Anhang zum publizierten Briefwechsel gemacht hat, um dem Leser die Mühe der Einzelrechnungen zu ersparen[5]). Für jede der möglichen Karten Pauls sind in je einer Zeile vier Werte aufgeführt, die sich aus den vier möglichen Strategiepaaren ergeben. Diese Werte, dividiert durch $51 \cdot 25$ ($= 1275$), stellen die Hoffnung Pauls dar (Spieleinsatz $= 1$). Die kurze Bezeichnung tauschen oder nicht tauschen wird hier und im folgenden bei Pierre für dessen Verhalten bei der Karte 8, bei Paul für dessen Verhalten bei der Karte 7 verwendet.

*Hoffnung von Paul*

| Karte von Paul | Paul tauscht | | Paul tauscht nicht | |
|---|---|---|---|---|
| | Pierre tauscht | Pierre tauscht nicht | Pierre tauscht | Pierre tauscht nicht |
| Roi | 1200 | 1200 | 1200 | 1200 |
| Dame | 1052 | 1058 | 1052 | 1058 |
| Valet | 888 | 902 | 888 | 902 |
| Dix | 724 | 746 | 724 | 746 |
| Neuf | 560 | 590 | 560 | 590 |
| Huit | 476 | 434 | 476 | 434 |
| Sept | 390 | 390 | 408 | 360 |
| Six | 444 | 444 | 444 | 444 |
| Cinq | 490 | 490 | 490 | 490 |
| Quatre | 528 | 528 | 528 | 528 |
| Trois | 558 | 558 | 558 | 558 |
| Deux | 580 | 580 | 580 | 580 |
| As | 594 | 594 | 594 | 594 |

Daraus ergeben sich die folgenden Durchschnittswerte (bezogen auf $51 \cdot 25$):

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2828 | 2838 | 2834 | 2828 |
| 5525 | 5525 | 5525 | 5525 |

Die Berechnung der Einzelwerte in dieser Tabelle ist uninteressant. Dazu verweisen wir auf eine Abhandlung von Jean Trembley (1749–1811), der diese Rechnungen in

[5]) *Essay* 2°, p. 413.

allen Details durchgeführt hat[6]). Die Diskussion im Briefwechsel basiert auf den letzten vier je einem Strategiepaar entsprechenden Durchschnittswerten. Was diese Werte betrifft, so sind schon anfangs beide Korrespondenten zu den gleichen Resultaten gelangt. Die ganze Diskussion dreht sich einzig um die Wahl der für beide Spieler günstigsten Strategie bzw. der günstigsten Mischung der Strategien. Der Übersicht halber wollen wir die vier Durchschnittswerte für die Hoffnung von Paul in der folgenden Anordnung darstellen:

*Hoffnung von Paul*

| | | Paul | |
|---|---|---|---|
| | | tauscht | tauscht nicht |
| Pierre | tauscht | $\frac{2828}{5525}$ | $\frac{2834}{5525}$ |
| | tauscht nicht | $\frac{2838}{5525}$ | $\frac{2828}{5525}$ |

Zu derselben $(2 \times 2)$-Matrix ist auch M. Dresher in seinen Untersuchungen über das Spiel Le Her gelangt[7]). Wir entnehmen dem Schema, daß es für Paul dann am günstigsten ist, wenn er tauscht und Pierre nicht tauscht. Wenn aber Paul immer tauscht, wird dies Pierre zu seinem Vorteil ausnützen und ebenfalls tauschen. Dann aber müßte Paul seine Strategie in Nicht-Tauschen ändern. Würde man so weiter schließen, könnte man sich aus einem Zirkelschluß nicht mehr befreien. Für Pierre ist es am vorteilhaftesten, wenn beide tauschen oder nicht tauschen; Paul hingegen befindet sich im Vorteil, wenn der eine von ihnen tauscht und der andere nicht. (Allerdings ist Paul immer im Vorteil, da alle vier Hoffnungswerte $> 1/2$ sind. Pierres Verhalten wird sich darnach richten müssen, den Vorteil Pauls möglichst klein zu halten. Um das Spiel für beide Personen gerecht zu halten, müßte der Einsatz Pierres in entsprechender Weise gekürzt werden.)

Im Brief Montmorts an Niklaus Bernoulli vom 10. 4. 1711 beginnt die Auseinandersetzung mit dem Problem[8]). Montmort berichtet, er habe gefunden, daß Paul einen Vorteil habe, der zwischen 1/84 und 1/85 liege (der Einsatz ist immer 1), wobei sich der Vorteil als Hoffnung minus Spieleinsatz $(= 1/2)$ errechnet. Von den vier Hoffnungswerten im obigen Schema genügt dieser Bedingung nur der zweimal vorkommende Wert 2828/5525, der den Fällen, in denen entweder beide Spieler tauschen oder beide nicht tauschen, entspricht. Eine solche Verhaltensweise wirkt sich jedoch für Paul auf

[6]) J. Trembley, *Observations sur le calcul d'un jeu de hasard.* Mém. Acad. Berlin *1802*, 86–102.
[7]) M. Dresher, *Games of strategy. Theory and applications*, p. 60; Deutsche Bearbeitung von H. P. Künzi, *Strategische Spiele. Theorie und Praxis*, p. 66.
[8]) Diese Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, p. 321.

die Dauer ungünstig aus. Es ist bemerkenswert, daß Montmort abschließend schreibt, das Problem bereite Schwierigkeiten besonderer Art. Darauf antwortet Niklaus Bernoulli im Brief vom 10. 11. 1711, nachdem er dem Ergebnis Montmorts bezüglich des Vorteils von Paul zugestimmt hat:

«Vous dites de plus que ce Probléme a des difficultés d'une nature fort singuliére; moy je n'en trouve aucune; quand on a une fois determiné ou plustôt supposé, quelles sont les cartes, auxquelles les joueurs veulent s'en tenir, alors le reste est facile, autrement on ne sçauroit rien trouver de certain sur ce jeu-là, puisqu'il dépend du caprice des joueurs à s'en tenir à une telle ou telle carte.[9])»

Weiterhin behauptet Bernoulli, das günstigste Verhalten für beide Spieler bei der kritischen Karte sei Tauschen und die Hoffnung Pierres würde sich zu der Pauls wie 2697:2828 verhalten. Würde sich Paul zum Nicht-Tauschen entschließen, dann wäre Pierre ebenfalls zum Nicht-Tauschen genötigt, und das Verhältnis 2697:2828 bliebe unverändert. Montmort ist in seiner Antwort vom 1. 3. 1712 mit Bernoullis Argumentation einverstanden, ja freut sich darüber, daß sie beide zu demselben Resultat gelangt seien[10]). Damit hätte vielleicht jetzt schon die Diskussion um das Spiel Le Her im Briefwechsel ein Ende gefunden, wenn nicht der Abbé d'Orbais und Waldegrave mit ihren Einwänden diesen Stillstand verhindert hätten. Im gleichen Brief zitiert Montmort eine längere Stelle eines Briefes, den Waldegrave an ihn gerichtet hat[11]). Darin gibt Waldegrave zu verstehen, daß er und der Abbé d'Orbais die Lösung Bernoullis nicht akzeptierten. Es sei für beide Spieler gleichgültig, ob sie tauschen oder nicht. Ihre Begründung ist aufschlußreich: Sie sprechen von Gewichten $A$ und $B$, die die beiden Spieler Paul bzw. Pierre zum Tausch bewegen. Wenn Paul durch das Gewicht $A$ zum Tauschen bewegt wird, so wird Pierre ebenfalls tauschen. Wenn aber Pierre tauscht, so wird Paul zum Nicht-Tauschen bewogen. Das Gewicht $A$ bewegt also Paul zu zwei sich ausschließenden Handlungen: Tauschen und Nicht-Tauschen. Diese Argumentation lehnt Bernoulli in der Antwort vom 2. 6. 1712 als Sophisterei ab[12]). Sobald man nämlich die Hypothese gemacht habe, daß Paul tauschen müsse und infolgedessen Pierre ebenfalls tausche, sei es nicht statthaft, zu Paul zurückzukehren, um ihn seine Maxime in Nicht-Tauschen ändern zu lassen. Waldegrave und der Abbé d'Orbais beharren jedoch auf ihrem Standpunkt, daß es für Paul völlig gleichgültig sei, ob er tausche oder nicht tausche; dies ist aus Zitationen im Brief Montmorts an Bernoulli vom 5. 9. 1712 ersichtlich[13]). Im weiteren wird Montmort vom Abbé d'Orbais aufgefordert, in diesem Streit endlich für die eine oder andere Seite Partei zu ergreifen[14]).

[9]) Die zitierte Stelle ist in *Essay* 2° nicht gedruckt, hingegen die folgenden Behauptungen Bernoullis (p. 334).

[10]) Diese Stelle ist gedruckt in *Essay* 2°, p. 338.

[11]) Diese Stelle ist gedruckt in *Essay* 2°, pp. 339–340. Es ist hier zu beachten, daß die Zahlenwerte, mit denen hier Waldegrave argumentiert, nicht die vier Hoffnungswerte des obigen Schemas sind, sondern die speziellen vier Hoffnungswerte, die Paul bei der Karte 7 hat, und die vier Hoffnungen, die Pierre bei der Karte 8 hat, falls Paul nicht getauscht hat. Die übrigen Fälle werden nicht miteinbezogen. Darauf wollen wir hier nicht näher eintreten, da Waldegraves Argumentation auch nach unserem Schema verständlich wird.

[12]) Diese Stelle ist gedruckt in *Essay* 2°, pp. 348–349.

[13]) Diese Briefstellen sind in *Essay* 2° nicht gedruckt.

[14]) Gedruckt in *Essay* 2°, p. 361.

Als einen Fortschritt in der festgefahrenen Diskussion darf wohl ein Gedanke Bernoullis im Brief vom 30. 12. 1712 gewertet werden, wenigstens in methodischer Hinsicht[15]). Bernoulli will zeigen, daß es für Paul günstiger ist, immer zu tauschen, als sich dem Zufall zu überlassen, wie es Waldegrave fordert. Man kann sich dem Zufall dadurch am besten überlassen, indem man vor jedem Spiel aus einem Sack, der mit gleichviel weißen wie schwarzen Kugeln[16]) gefüllt ist, eine zieht. Zieht man eine weiße Kugel, befolgt man die Strategie Tauschen, andernfalls die Strategie Nicht-Tauschen. Der Gebrauch eines solchen Modells wird sich in der weiteren Phase des Disputes als fruchtbar erweisen.

Die entscheidende Wende in der Diskussion ist erst mit dem Brief Montmorts an Niklaus Bernoulli vom 15. 11. 1713 eingetreten. Es ist der letzte der in *Essay* 2° abgedruckten Briefe. Montmort schreibt darin:

«J'ai crû quelque temps qu'un certain temperament de jettons pour Pierre & pour Paul sauveroit le cercle, mais j'ai trouvé que l'on y retombe toujours.»[17])

Montmort knüpft also an Bernoullis Urnenmodell an. Er setzt voraus, daß Paul $a$ weiße und $b$ schwarze Kugeln, Pierre $c$ weiße und $d$ schwarze Kugeln in eine Urne legen. Wenn beide Spieler sich dann dem reinen Zufall überlassen, indem sie bei Ziehung einer weißen Kugel tauschen und bei Ziehung einer schwarzen Kugel nicht tauschen, so habe Paul die Hoffnung[18])

$$s = \frac{2828\,a\,c + 2834\,b\,c + 2838\,a\,d + 2828\,b\,d}{5525(a + b)\,(c + d)}\,. \tag{3.1}$$

Montmort scheint aber noch weit davon entfernt zu sein, auch nur qualitativ richtige Mischungsverhältnisse angeben zu können. Er glaubt, Paul empfehlen zu dürfen, öfters zu tauschen als nicht zu tauschen. Obwohl gerade das Gegenteil richtig ist, stellt Montmorts Gedanke insofern einen Fortschritt dar, als er eine Mischung von Strategien anerkennt. Genaue Angaben über die Mischungsverhältnisse sind jedoch nach Montmort nicht möglich:

«mais combien plus souvent il (Paul) doit changer que s'y tenir, & en particulier ce qu'il doit faire (hic & nunc) car c'est là principalement la question: le calcul n'apprend rien là-dessus, & j'en tiens la décision impossible.»[19])

Montmort hatte den Brief noch nicht beendet, als er von Waldegrave einen Brief, datiert vom 13. 11. 1713, erhielt. Sogleich fügte nun Montmort seinem Brief an Bernoulli einen Auszug aus Waldegraves Brief bei[20]). Darin treffen wir erstmals eine korrekte Lösung des Problems an. Waldegrave hatte als erster die optimalen Mi-

15) Gedruckt in *Essay* 2°, pp. 376–378.
16) Statt von Kugeln spricht Bernoulli von Jettons.
17) *Essay* 2°, p. 403.
18) *Essay* 2°, p. 404. Montmort wird bei der folgenden Formel stillschweigend vorausgesetzt haben, daß die Kugeln nach jeder Ziehung wieder zurückgelegt werden, damit die Mischungsverhältnisse $a:b$ bzw. $c:d$ konstant bleiben.
19) *Essay* 2°, p. 405.
20) *Essay* 2°, pp. 409–412.

schungsverhältnisse $a:b = 3:5$ und $c:d = 5:3$ gefunden. Bevor wir näher darauf eintreten, wollen wir zeigen, daß diese Lösung optimal ist. Dabei bedienen wir uns einer Methode, die über das mathematische Wissen der damaligen Zeit nicht hinausgeht. Wir führen zunächst für die gemischten Strategien von Paul und Pierre die Variablen $x$ bzw. $y$ ein, wobei $0 \leq x, y \leq 1$. Sie sollen die Häufigkeiten wiedergeben, mit der die Strategie Tauschen von Paul bzw. Pierre gewählt wird. $x_0$ und $y_0$ seien die gesuchten optimalen Strategienmischungen; es gilt dann $x_0 = a/(a + b)$ und $y_0 = c/(c + d)$. Wir erhalten für Pauls Hoffnung pro Spiel, die wir mit $S(x, y)$ bezeichnen:

$$\left.\begin{aligned} S(x, y) &= \frac{2828\,x\,y + 2834(1 - x)\,y + 2838\,x(1 - y) + 2828(1 - x)\,(1 - y)}{5525} \\ &= \frac{10\,x + 6\,y - 16\,x\,y + 2828}{5525}\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Das Problem besteht nun für Paul darin, $x$ so zu wählen, daß $S(x, y)$ für jedes $y$ ein Maximum wird, und für Pierre, $y$ so zu wählen, daß $S(x, y)$ für jedes $x$ ein Minimum wird. $S(x, y)$ können wir in der Form

$$S(x, y) = \alpha\, s(x, y) + \beta$$

darstellen, wobei $\alpha$ und $\beta$ Konstanten sind, und $s(x, y)$ durch die Gleichung

$$s(x, y) = 5\,x + 3\,y - 8\,x\,y \tag{3.3}$$

ausgedrückt wird. Wegen der linearen Beziehung zwischen $S(x)$ und $s(x)$ dürfen wir die Optimierungsaufgabe am einfacheren Ausdruck (3.3) durchführen. Um Pauls optimale Strategienmischung $x_0$ zu bestimmen, schreiben wir (3.3) in der Form

$$s(x, y) = (3 - 8\,x)\,y + 5\,x\,. \tag{3.4}$$

Wählt nun Paul $x$ so, daß $3 - 8\,x = 0$, das heißt $x = 3/8$, so wird der von Paul zu maximalisierende Wert $s(x, y)$ immer die Höhe von $5\,x = {}^{15}/_{8}$ erreichen, gleichgültig, welche Strategie Pierre wählt. Wir wollen nun zeigen, daß es für Paul keine günstigere Strategienmischung als $x_0 = {}^{3}/_{8}$ geben kann. Wählt nämlich Paul eine andere Strategienmischung $x$, so gelingt es Pierre, durch geeignete Wahl von $y$, immer, $s(x, y)$ kleiner als $s(x_0, y)$ zu halten. Dies beweisen wir folgendermaßen: $x$ weiche um den Betrag $\Delta x$ von $x_0$ ab ($0 \leq x_0 + \Delta x \leq 1$). Aus (3.4) errechnet man

$$s(x_0, y) - s(x_0 + \Delta x, y) = (8\,y - 5)\,\Delta x\,. \tag{3.5}$$

Wenn $\Delta x > 0$, wird Pierre $y = 1$, und wenn $\Delta x < 0$, $y = 0$ wählen. In beiden Fällen wird (3.5) positiv, das heißt $s(x_0, y) > s(x_0 + \Delta x, y)$, und zugleich wird dabei Pauls Gewinn minimalisiert. In der Bezeichnungsweise der Spieltheorie wird dieser Sachverhalt durch

$$s(x_0, y) = \operatorname*{Max}_{x}\operatorname*{Min}_{y} s(x, y)\,, \tag{3.6}$$

wobei $x_0 = {}^3/_8$, ausgedrückt. Auf analoge Art beweist man, daß Pierres Strategienmischung mit $y_0 = {}^5/_8$ optimal wird. Zu diesem Zweck formen wir (3.3) um in

$$s(x, y) = (5 - 8\,y)\,x + 3\,y\,. \tag{3.7}$$

Mit $y = {}^5/_8$ gelingt es Pierre, unabhängig von Pauls Strategienwahl, den Wert $s(x, y)$ auf $3\,y = {}^{15}/_8$ zu minimalisieren. Auf die gleiche Art wie oben kann man zeigen, daß bei jeder Abweichung $\Delta y$ vom Wert $y_0 = {}^5/_8$ Paul die Möglichkeit hat, $s(x, y)$ zu vergrößern. Es gilt also

$$s(x, y_0) = \operatorname*{Min}_{y}\operatorname*{Max}_{x} s(x, y)\,, \tag{3.8}$$

wobei $y_0 = {}^5/_8$. Zugleich haben wir in Übereinstimmung mit dem Minimaxtheorem gefunden, daß

$$s(x_0, y) = s(x, y_0) = \frac{15}{8}\,. \tag{3.9}$$

Ersetzt man schließlich die Variablen $x$ und $y$ in (3.2) durch ${}^3/_8$ bzw. ${}^5/_8$, so folgt für Pauls Hoffnung:

$$S(3/8, 5/8) = \frac{2831\,{}^3/_4}{5525}\,. \tag{3.10}$$

Damit ist Waldegraves Ergebnis vollständig bewiesen.
Es erscheint hier angebracht, einige Originalstellen aus Waldegraves interessantem Brief vorzulegen. Der Auszug davon, den wir in Montmorts Brief finden, beginnt wie folgt:

«$a$ étant = 3, & $b$ = 5, on voit par la formule ($a$)[21] que si Pierre a la maxime de changer le 8, le sort de Paul est

$$\frac{8484 + 14170}{13.17.25 \times 8} = \frac{11327}{5525 \times 4} = \frac{2831}{5525} + \frac{3}{5525 \times 4}\,.$$

Et si Pierre a la maxime de garder son huit

$$\frac{8514 + 14140}{13.17.25 \times 8} = \frac{2831}{5525} + \frac{3}{5525 \times 4}\,.\text{»}^{22)}$$

Waldegrave ist sich im klaren darüber, daß Pauls Hoffnung, falls er die Strategien im Verhältnis $a:b = 3:5$ mischt, nicht mehr davon abhängt, in welchem Verhältnis $c:d$ Pierre seine Strategien mischt:

«Ainsi il est égal dans cette supposition à Pierre de changer au huit ou non; & generalement le sort de Paul est toujours 2831/5525 + 3/(5525 × 4), lorsque $a$ = 3 & $b$ = 5, quelque valeur qu'on puisse donner aux lettres $c$ & $d$, c'est à dire que son sort sera toujours 2831/5525 + 3/(5525 × 4), quelque parti que prenne Pierre lorsqu'il aura un 8, soit de changer ou de garder son 8 déterminément, ou de se commettre à un nombre égal ou inégal de jettons.»[23]

Allerdings ist es für Pierre ebenfalls empfehlenswert, die optimale Strategienmischung $c:d = 5:3$ zu wählen, denn würde er zum Beispiel blindlings spielen, könnte dies Paul

[21] Waldegrave meint hier Formel (3.2).
[22] Diese Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, p. 409.
[23] Diese Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, pp. 409/410.

nach genügend vielen Spielen merken und daraus sogleich die Konsequenzen ziehen und fortwährend tauschen, wie es Niklaus Bernoulli vorgeschlagen hat. Auch darauf hat Waldegrave geachtet, denn am Schluß seiner weiteren Ausführungen, in denen er seinen Standpunkt gegenüber Niklaus Bernoulli verteidigt, bemerkt er mit Recht:

«J'ai oublié de vous faire observer que Pierre a une voye pour borner le sort de Paul à 2831/5525 + 3/4 × 1/5525, en faisant $c = 5$ & $d = 3$, ce que vous verrés encore avec évidence, en substituant dans la formule les valeurs $c$ & $d$. On pourroit croire que comme il ne tient qu'à Pierre de borner le sort de Paul à 2831/5525 + 3/4 × 1/5525, de même qu'il ne tient qu'à Paul de s'assurer ce même sort, Paul devroit faire toujours $a = 3$ & $b = 5$, & Pierre $c = 5$ & $d = 3$, ce qui feroit une maxime constante pour l'un & l'autre Joueur; mais il me paroît qu'elle seroit mal établie par les raisons que nous avons dites tant de fois, & que cela ne doit point empêcher Pierre & Paul de jouer au plus fin, dans l'esperance de rendre chacun son sort meilleur.»[24])

Es ist staunenswert, wie viele grundlegende Begriffe und Gedanken aus der modernen Spieltheorie in diesen Texten enthalten sind. Nicht minder erstaunt uns Waldegraves feste Überzeugung der Richtigkeit seiner Behauptungen, die er mehrmals gegenüber einem überlegenen Mathematiker wie Niklaus Bernoulli verteidigen mußte. Leider besaß Waldegrave nicht die mathematischen Fähigkeiten, um eine allgemeine Methode der Berechnung auszuarbeiten. In seinem einzigen Brief an Niklaus Bernoulli vom 9. 1. 1715 gesteht Waldegrave, daß er nicht imstande sei, den Beweis seiner Ergebnisse zu führen.

Im Brief vom 20. 2. 1714 an Montmort erklärt sich Niklaus Bernoulli mit Waldegraves Ergebnis einverstanden, sofern man die Idee der Strategienmischung zulasse. Zu dem gleichen Resultat sei er selber auch gelangt[25]). Zudem teilt er noch die Lösung einer anderen spieltheoretischen Aufgabe mit, die ihm Montmort im Brief vom 15.11.1713 gestellt hat und die wie folgt lautet: Ein Vater will seinem Sohn ein Taschengeld geben. Er hält in der Hand eine Anzahl Jettons. Der Sohn soll nun erraten, ob diese Anzahl gerade oder ungerade sei. Ist die Anzahl gerade und rät der Sohn richtig, erhält er 4 Ecus; ist die Anzahl ungerade und rät er richtig, erhält er 1 Ecu; wenn er falsch rät, erhält er nichts. Bezeichnet man die Strategie des Vaters, eine gerade Anzahl Jettons in der Hand zu halten, mit $x$ und jene des Sohnes, eine gerade Anzahl zu erraten, mit $y$, so folgt für die Anzahl Ecus, die der Sohn erwarten darf, und die wir mit $s(x, y)$ bezeichnen,

$$\begin{aligned} s(x, y) &= 4\,x\,y + (1 - x)\,(1 - y) \\ &= 5\,x\,y - x - y + 1\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Durch analoge Überlegungen wie im obenstehenden Beweis beim Problem Le Her findet man $x = {}^1/_5$ und $y = {}^1/_5$. Durch Einsetzen dieser Werte in (3.11) folgt

$$s\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}\,. \tag{3.12}$$

In diesem Schlußergebnis (3.12) besteht Niklaus Bernoullis Lösung; wie er sie gefunden hat, ist aus seinem Brief nicht ersichtlich.

[24]) Diese Briefstelle ist gedruckt in *Essay* 2°, pp. 411/412.

[25]) Dieser Brief ist in *Essay* 2° nicht mehr aufgenommen worden. Montmorts weitere spieltheoretische Aufgabe, von der im folgenden die Rede ist, findet sich in *Essay* 2°, p. 406, gedruckt.

Für Niklaus Bernoulli scheint die Berechnung optimaler Strategienmischungen in solchen Aufgaben keine besonderen Schwierigkeiten zu bereiten. In der darauffolgenden Diskussion wird aber in zunehmendem Maße deutlich, daß er die Idee der optimalen Strategienmischung, auch wenn er diese berechnen kann, nicht voll akzeptiert, sondern von neuem seine früheren Argumente ins Feld führt. Wäre er wie Waldegrave von deren Richtigkeit überzeugt gewesen, hätte er wohl, ähnlich wie bei manchen Problemen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das Problem verallgemeinert und etwa mit Hilfsmitteln, deren wir uns beim obigen Beweis bedient haben, eine Berechnungsmethode entwickelt. Vermutlich wären aber auch dann diese spieltheoretischen Ansätze, falls die mathematische Welt von ihnen überhaupt erfahren hätte, in Vergessenheit geraten.

## BIBLIOGRAPHIE

### 1. Quellen

Es folgt zunächst ein Verzeichnis der Abkürzungen, die in der nachstehenden Bibliographie sowie in den Anmerkungen verwendet werden. Der Name des Verfassers wird in Abkürzungen für gesammelte Werke weggelassen, sofern dabei kein Mißverständnis entsteht.

| | |
|---|---|
| (Nouv.) Mém. Acad. Berlin: | (Nouveaux) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres. Berlin. |
| Hist. Acad. Paris: | Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Paris. |
| (Nov.) Comm. Acad. Petr.: | (Novi) Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ. |
| Mém. Acad. Petersb.: | Mémoires de l'Académie Imperiale de St.Pétersbourg. |
| Phil. Transact.: | Philosophical Transactions. London. |
| *Opera* (Johannis Bernoulli): | *Johannis Bernoulli... opera omnia*, tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita. Lausannæ & Genevæ 1742. |
| *Opera* (Euleri): | *Leonhardi Euleri opera omnia...* edenda curaverunt Ferdinand Rudio, Adolf Krazer, Paul Stäckel. Leipzig und Berlin. |
| *Oeuvres* (de Fermat): | *Oeuvres de Fermat* publiées par les soins de Paul Tannery et Charles Henry. Paris 1891–1912. |
| *Oeuvres* (de Huygens): | *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, publiées par la Société Hollandaise des sciences. La Haye 1888–1950. |
| *Oeuvres* (de Pascal): | *Oeuvres de Blaise Pascal*, publiées... par Léon Brunschvicg et Pierre Boutroux. Paris 1908–1914. |
| *Oeuvres* (de Struyck): | *Les Oeuvres de Nicolas Struyck...* qui se rapportent au calcul des chances, à la statistique générale, à la statistique des décès et aux rentes viagères... Traduites... par J. A. Vollgraff. Amsterdam 1912. |

Montmorts *Essay d'analyse sur les jeux de hasard* (siehe unten) wird mit *Essay* 1° bei der 1. Auflage und mit *Essay* 2° bei der 2. Auflage abgekürzt.

Arbuthnot, John (1667–1735)

– *An argument for divine providence, taken from the constant regularity observ'd in the births of both sexes.* Phil. Transact. *27*, Nr. 328, 186–190, 1710 (London 1712).

Bernoulli, Daniel (1700–1782)

– *Præfatio auctoris in primam quæstionem commotam a V. Cl. Joh. Rizzetto*, in: *Exercitationes quædam mathematicæ*, pp. 3–29 (Venetiis 1724).

Bernoulli, Jakob (1655–1705)
- *Ars Conjectandi, opus posthumum.* Basileæ 1713. Deutsche Übersetzung mit Erläuterungen: R. Haußner, *Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 107/108 (Leipzig 1899).
- *Positiones arithmeticæ de seriebus infinitis earumque summa finita,* Pars I–V. Basileæ (1689–1704) = *Tractatus de seriebus infinitis earumque summa finita, et usu in quadraturis spatiorum et rectificationibus curvarum,* in: *Ars Conjectandi,* pp. 241–306 (Basileæ 1713). Deutsche Übersetzung mit Erläuterungen: G. Kowalewski, *Über unendliche Reihen* (1689–1704). Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 171 (Leipzig 1909).
- *Lettre à un amy sur les parties du jeu de paume,* im Anhang zu: *Ars Conjectandi* (Basileæ 1713). Deutsche Übersetzung mit Erläuterungen: R. Haußner, *Brief an einen Freund über das Ballspiel,* im Anhang zu: *Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 108, pp. 108–146 (Leipzig 1899).
- *Eloge de M. Bernoulli.* Hist. Acad. Paris *1705,* 139–150 (Paris 1706).
- *Eloge de M. Bernoulli,* cy-devant Professeur de Mathematique à Bâle. Journal des Sçavans *1706,* 81–89 (Paris 1706).

Bernoulli, Johann (1667–1748)
- *Briefwechsel mit Leibniz 1693–1716,* in: C. I. Gerhardt, *Leibnizens mathematische Schriften* III, pp. 111–973 (Halle 1856).
- Briefwechsel mit Montmort 1703–1719. Manuskripte der Universitätsbibliothek Basel; teilweise gedruckt in Montmorts *Essay* 2°, pp. 283–298, 303–307 (Paris 1713), und in den *Opera Johannis Bernoulli* I, pp. 453–468 (Lausannæ & Genevæ 1742).

Bernoulli, Niklaus (1687–1759)
- *Dissertatio inauguralis mathematico-juridica de usu artis conjectandi in jure.* Basileæ 1709.
- *Briefwechsel mit Leibniz 1712–1716,* in: C. I. Gerhardt, *Leibnizens mathematische Schriften* III, pp. 975–994 (Halle 1856).
- Briefwechsel mit Montmort 1710–1719. Manuskripte der Universitätsbibliothek Basel; teilweise gedruckt in Montmorts *Essay* 2°, pp. 299–303, 308–412 (Paris 1713).
- Briefwechsel mit Waldegrave 1715. Manuskripte der Universitätsbibliothek Basel.

Euler, Leonhard (1707–1783)
- *Observationes analyticæ variæ de combinationibus.* Comm. Acad. Petr. *13,* 64–93, 1741–1743 (Petropoli 1751) = *Opera* I.2, pp. 163–193 (Lipsiæ et Berolini 1915).
- *De partitione numerorum.* Nov. Comm. Acad. Petr. *3,* 125–169, 1750/51 (Petropoli 1753) = *Opera* I.2, pp. 254–294 (Lipsiæ et Berolini 1915).
- *Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre.* Mém. Berlin *1751,* 255–270 (Berlin 1753) = *Opera* I.7, pp. 11–25 (Lipsiæ et Berolini 1923).
- *Sur l'avantage du banquier au jeu de Pharaon.* Mém. Berlin *1764,* 144–164 (Berlin 1766) = *Opera* I.7, pp. 57–78 (Lipsiæ et Berolini 1923).
- *De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas.* Nov. Comm. Acad. Petr. *14,* 168–187, 1769/I (Petropoli 1770) = *Opera* I.3, pp. 131–147 (Lipsiæ et Berolini 1917).
- *Solutio quæstionis curiosæ ex doctrina combinationum. Conventui exhibita die 18 Octobris 1779.* Mém. Petersb. *3,* 57–64, 1809/10 (St.Pétersbourg 1811) = *Opera* I.7, pp. 435–440 (Lipsiæ et Berolini 1923).

Fermat, Pierre de (1601–1665)
- *Briefwechsel mit Pascal 1654,* in: *Oeuvres de Fermat* II, pp. 288–314 (Paris 1894) = *Oeuvres de Pascal* III, pp. 369–431 (Paris 1908).

Huygens, Christiaan (1629–1695)
- *De ratiociniis in ludo aleæ,* in: Fr. à Schooten, *Exercitationum mathematicarum libri quinque,* pp. 517–534 (Lugd. Batav. 1657). Französische Übersetzung mit Erläuterungen in: *Oeuvres de Huygens* XIV, pp. 54–91 (La Haye 1920).

Lambert, Johann Heinrich (1728–1777)
- *Examen d'une espece de superstition ramenée au calcul des probabilités.* Nouv. Mém. Acad. Berlin *1771,* 411–420 (Berlin 1773).

Laplace, Pierre Simon (1749–1827)
– *Théorie analytique des probabilités.* Paris 1812.
Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716)
– *Dissertatio de arte combinatoria.* Lipsiæ 1666 = C. I. Gerhardt, *Leibnizens mathematische Schriften* V, pp. 1–79 (Halle 1858).
– Briefwechsel mit Johann Bernoulli 1693–1716. Siehe unter Johann Bernoulli.
– Briefwechsel mit Niklaus Bernoulli 1712–1716. Siehe unter Niklaus Bernoulli.
Moivre, Abraham de (1667–1754)
– *De mensura sortis, seu; de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus.* Phil. Transact. *27*, Nr. 329, 213–264, 1711 (London 1712).
– *The doctrine of chances: or a method of calculating the probability of events in play.* London 1718. 2nd Ed.: London 1738. 3rd Ed.: London 1756.
– *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis. Accessere variæ considerationes de methodis comparationum, combinationum et differentiarum.* Londini 1730.
Montmort, Pierre Rémond de (1678–1719)
– *Essay d'analyse sur les jeux de hazard.* Paris 1708. 2e Ed.: Paris 1713.
– *De seriebus infinitis tractatus. Pars prima.* Phil. Transact. *30*, Nr. 353, 633–675, 1717 (London 1720).
– Briefwechsel mit Johann Bernoulli 1703–1719. Siehe unter Johann Bernoulli.
– Briefwechsel mit Niklaus Bernoulli 1710–1719. Siehe unter Niklaus Bernoulli.
– *Eloge de M. de Montmort.* Hist. Acad. Paris *1719*, 83–93 (Paris 1721).
Pascal, Blaise (1623–1662)
– Briefwechsel mit Fermat 1654. Siehe unter Fermat.
Struyck, Nicolaas (1686–1769)
– *Uytreekening der kanssen in het speelen, door de arithmetica en algebra, beneevens een verhandeling van looteryen en interest.* Amsterdam 1716 = *Oeuvres*, pp. 1–118 (Amsterdam 1912).
Trembley, Jean (1749–1811)
– *Observation sur le calcul d'un jeu de hasard.* Mém. Acad. Berlin *1802*, 86–102 (Berlin 1804).

## 2. Sekundärliteratur

Berge, C.: *Principes de combinatoire.* Paris 1968.
Borel, E.: *Traité du calcul des probabilités et de ses applications.* Tome IV, Fasc. II: *Applications aux jeux de hasard.* Paris 1938.
Burger, H.: *Ausgewählte kombinatorische Probleme in analytischer Behandlung.* Dissertation. Bern 1948.
Cantor, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 3. Aufl., 2. Band: von 1200–1668. Leipzig 1900. 3. Band: von 1668–1758. Leipzig 1901.
Czuber, E.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung*, 3. Aufl., 1. Band: *Wahrscheinlichkeitstheorie, Fehlerausgleichung, Kollektivmaßlehre.* Leipzig und Berlin 1914.
Dickson, L. E.: *History of the theory of numbers.* Vol. II: *Diophantine analysis.* Washington 1920.
Dresher, M.: *Games of strategy. Theory and applications.* London 1961. Deutsche Bearbeitung: Künzi, H. P., *Strategische Spiele. Theorie und Praxis.* Zürich 1961.
Feller, W.: *An introduction to probability theory and its applications.* New York, London 1950.
Freudenthal, H., Steiner, H.-G.: *Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik*, in: *Grundzüge der Mathematik* IV, pp. 149–195 (Göttingen 1966).
Karlin, S.: *Mathematical methods and theory in games, programming, and economics*, Bd. 1–2. Massachusetts, London 1959.
Mahnke, D.: *Leibniz auf der Suche nach einer allgemeinen Primzahlgleichung.* Bibliotheka Mathematica (3), *13*, 29–61, 1912 (Leipzig 1912).
Netto, E.: *Lehrbuch der Combinatorik.* Leipzig 1901.
Neumann, J. von: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele.* Mathematische Annalen *100*, 295–320, 1928 (Berlin 1928).

Ostmann, H.-H.: *Additive Zahlentheorie.* 1. Teil: *Allgemeine Untersuchungen,* in: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge *1956,* Heft 7.

Riordan, J.: *An introduction to combinatorial analysis.* New York, London 1958.

Schneider, I.: *Der Mathematiker Abraham de Moivre (1667–1754).* Archive for History of Exact Sciences *5,* 177–317, (1968).

Todhunter, I.: *A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace.* Cambridge and London 1865. Anastat. Neudruck: New York 1949.

*Zusammenfassung*

Die vorliegende Dissertation stellt eine Vorarbeit zur späteren Edition des gesamten Briefwechsels Johann und Niklaus Bernoullis mit Pierre Rémond de Montmort (1678 bis 1719) dar. Es werden einige Probleme, die darin öfters auftauchen, systematisch und die historischen Zusammenhänge miteinbeziehend dargestellt. Dadurch soll in der Edition der Kommentar der wahrscheinlichkeitstheoretischen Stellen durch Hinweise auf diese Arbeit erleichtert werden.

Der umfangreichste und auch wertvollste Teil im Briefwechsel dürfte die Diskussion Montmorts mit Niklaus Bernoulli über das Spiel «Le Her» sein. Da dieses Spiel nicht mehr allein mittels der Wahrscheinlichkeitsrechnung lösbar ist, wird verständlich, daß die beiden Gelehrten während vier Jahren darüber korrespondiert haben. Das Neuartige an diesem Problem wurde von ihnen sogleich erkannt, und im Laufe der Auseinandersetzung sind sie bereits auf die Idee der Strategienmischung gestoßen. Wir treffen dabei sogar eine richtige Lösung für das günstigste Verhältnis an, in dem die Strategien gemischt werden sollten. Leider konnte sich Niklaus Bernoulli im Gegensatz zu Montmort mit der Idee der Strategienmischung nicht befreunden, auch wenn er imstande war, bei einem Spezialfall das richtige Verhältnis zu bestimmen. Demzufolge wurde die Diskussion ohne Entwicklung einer mathematischen Methode schon 1715 abgebrochen.

Aus den übrigen Themen, von denen in der vorliegenden Arbeit die Rede ist, verdienen besonders zwei kombinatorische Probleme hervorgehoben zu werden, die bis in die jüngste Zeit hinein weiter verfolgt wurden: ein Kompositionsproblem und das Rencontre-Problem. Das erstere befaßt sich mit der Frage, auf wieviele Arten sich eine natürliche Zahl $n$ additiv aus $p$ natürlichen Zahlen, unter Berücksichtigung der Reihenfolge, zusammensetzen läßt. Wird noch zusätzlich gefordert, daß keine der Summanden größer als eine vorgegebene Schranke $f$ sei, so ist das Problem identisch mit Montmorts Frage, auf wieviele verschiedene Arten man mit $p$ $f$-seitigen Würfeln eine Gesamtpunktezahl $n$ erreichen kann. In dieser allgemeinen Form hat Montmort als erster 1713 das Problem gestellt und gelöst (siehe Formel 1.3).

Ebenso auf Montmort geht das Rencontre-Problem zurück (1708); es kann in der folgenden Weise formuliert werden: Wieviele unter den $n!$ Permutationen der $n$ Elemente $1, 2, \ldots, n$ sind so beschaffen, daß mindestens ein Element seinen natürlichen Platz einnimmt? Die Wahrscheinlichkeit, daß eine beliebige Permutation diese Bedingung erfüllt, wird durch den Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

dargestellt, der bereits Montmort bekannt war, und wofür Niklaus Bernoulli im Briefwechsel zwei Beweise mitteilte. Dieser Ansatz Montmorts wurde im Laufe weniger Jahre im Briefwechsel mit Johann und Niklaus Bernoulli zu einem ansehnlichen Formelgebäude ausgeweitet. Später haben das Problem de Moivre, Euler, Lambert und Laplace wieder aufgegriffen.

# CURRICULUM VITAE

Am 6. Februar 1938 wurde ich, Julian Anton Henny, als Sohn des Kaufmanns Caspar Henny von Obersaxen (GR) und der Margretha, geb. Elvedi, in Obersaxen geboren. Dort besuchte ich die Primar- und Sekundarschule. Das Gymnasium absolvierte ich vom Herbst 1951 bis zur Matura (Typus A) im Sommer 1957 an der Klosterschule Disentis. Ich immatrikulierte mich im Herbst 1957 an der philosophischen Fakultät der Universität Freiburg i. Ue. und studierte dort während vier Semestern Philosophie. Im Herbst 1959 immatrikulierte ich mich an der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel. Hier bestand ich im April 1966 das Vordiplom in Versicherungslehre mit den Nebenfächern Mathematik und Experimentalphysik und im Mai 1967 das Diplom in Versicherungslehre mit den Nebenfächern Mathematik und Astronomie. Anschließend war ich als Assistent bei der Bernoulli-Edition in Basel tätig. Die vorliegende Arbeit entstand unter der Leitung des Sekretärs der Redaktion der Bernoulli-Edition, Herrn PD Prof. Dr. J. O. Fleckenstein, dem ich auch die Anregung zu dieser Arbeit verdanke, und von Herrn PD Dr. B. Romer, der mir insbesondere auf dem Gebiet der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Spieltheorie behilflich war; ich spreche ihnen an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aus. Den Herren Professoren Dr. E. Zwinggi und Dr. P. Leepin danke ich für ihr Interesse am Entstehen dieser Arbeit. Während meiner Assistententätigkeit hat Herr Dr. Straub, Sekretär der Bernoulli-Edition und Altbibliothekar, meine Einarbeitung im Bernoulli-Archiv in verdankenswerter Weise gefördert. Ein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. B. L. van der Waerden in Zürich, Herausgeber der wahrscheinlichkeitstheoretischen Werke Jakob Bernoullis, für die Durchsicht meiner Dissertation und die Bereitschaft, sie in seiner Edition zu veröffentlichen.

Während meines Studiums besuchte ich Vorlesungen und Übungen bei den folgenden Herren Dozenten, denen ich an dieser Stelle für die vielen Anregungen danken möchte: Universität Freiburg i. Ue.: I. M. Bocheński, V. Kuiper, N. Luyten, A. F. Utz, P. Wyser. Universität Basel: K. Alder, W. Becker, F. Blumer, G. Bombach, P. Buchner, R. Conzelmann, M. Eichler, J. O. Fleckenstein, M. Großmann, M. Gürtler, H. Guth, H. Huber, P. Huber, P. Leepin, E. Miescher, A. Portmann, B. Romer, P. Scherrer, E. Schubarth, E. Zwinggi.